SÉRIE VIII. — TOME IV. N° 6. JUIN 1943.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE
ET
LE RADIUM

FORMULE NOUVELLE POUR LA DISPERSION DES EFFETS KERR ET COTTON-MOUTON. INTERPRÉTATION ET RÉSULTATS

Par ROGER SERVANT.
Faculté des Sciences de Bordeaux.

Sommaire. — L'auteur propose pour traduire la dispersion des biréfringences électriques et magnétiques, de substituer à la formule de Havelock, une formule nouvelle très simple, exprimant directement les constantes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de Kerr et de Cotton-Mouton en fonction de la longueur d'onde :

$$\mathcal{B} = b\frac{\lambda}{\lambda^2 - \lambda_0^2}, \qquad \mathcal{C} = c\frac{\lambda}{\lambda^2 - \lambda_1^2}$$

(où b, c, λ_0 et λ_1 sont des constantes).

Il indique comment il a été amené, par son travail sur la biréfringence du quartz, à proposer cette formule.

Dans une première Partie, il en fait l'application à la biréfringence électrique du gaz carbonique, de l'hexane, de l'oxygène liquide, du chlorobenzène et à la biréfringence magnétique de l'oxyde azotique gazeux, du nitrate céreux en solution aqueuse, du méthylnaphtalène et du phénanthrène fondus, de l'oxygène liquide et enfin du nitrobenzène. Alors que les écarts à la loi de Havelock sont souvent de plusieurs unités pour cent, la formule proposée traduit les résultats avec une erreur toujours inférieure à 1 ou 0,5 pour 100. De plus, elle est susceptible d'une *interprétation graphique* extrêmement simple.

Dans la seconde Partie, l'auteur donne l'interprétation théorique de sa formule. Il montre qu'on peut la déduire de la *théorie de l'orientation* à condition de modifier légèrement les hypothèses qui conduisent d'habitude à la formule de Havelock et de supposer que l'anisotropie optique est pratiquement indépendante de la longueur d'onde.

En conclusion, l'auteur insiste sur l'intérêt de la formule proposée, qui permet d'une part de traduire avec une extrême simplicité les résultats expérimentaux relatifs à des intervalles spectraux parfois très étendus et d'autre part de calculer les anisotropies optiques et magnétiques *à partir de la dispersion* des biréfringences, et non pas seulement à partir de données numériques isolées, comme on l'avait fait jusqu'ici.

Introduction.

1. Dispersion de la biréfringence du quartz avec la longueur d'onde. — C'est l'étude de la biréfringence du quartz qui m'a suggéré la formule de dispersion que j'ai ensuite appliquée aux effets Kerr et Cotton-Mouton.

La biréfringence du quartz avait été mesurée dans l'ultraviolet jusqu'à 1850 Å. J'ai pu, au moyen d'un spectropolarimètre spécial, en poursuivre l'étude [1] dans la région de Schumann. La figure 1 représente les résultats obtenus.

Ils mettent en évidence l'accroissement très rapide de la double réfraction au voisinage immédiat de la région d'absorption. Ainsi, pour une variation de longueur d'onde de 100 Å, l'accroissement de $(n_e - n_0)$ atteint vers 1500 Å plus de *deux cent fois* sa valeur dans le spectre visible.

Ces résultats entraînaient la révision des formules de dispersion les plus récentes, d'ailleurs fort complexes. Les premières, dues à Coode-Adams (1928), étaient les suivantes :

$$n_0^2 = 3{,}53445 + \frac{0{,}00806700}{\lambda^2 - 0{,}0127493} + \frac{0{,}00268200}{\lambda^2 - 0{,}000974} + \frac{127{,}2}{\lambda^2 - 108},$$

$$n_e^2 = 3{,}5612557 + \frac{0{,}00844614}{\lambda^2 - 0{,}0127493} + \frac{0{,}00276113}{\lambda^2 - 0{,}000974} + \frac{127{,}2}{\lambda^2 - 108}.$$

Elles faisaient intervenir les mêmes fréquences

d'absorption propres pour les indices ordinaire et extraordinaire. Les secondes, dues à Engl (1936),

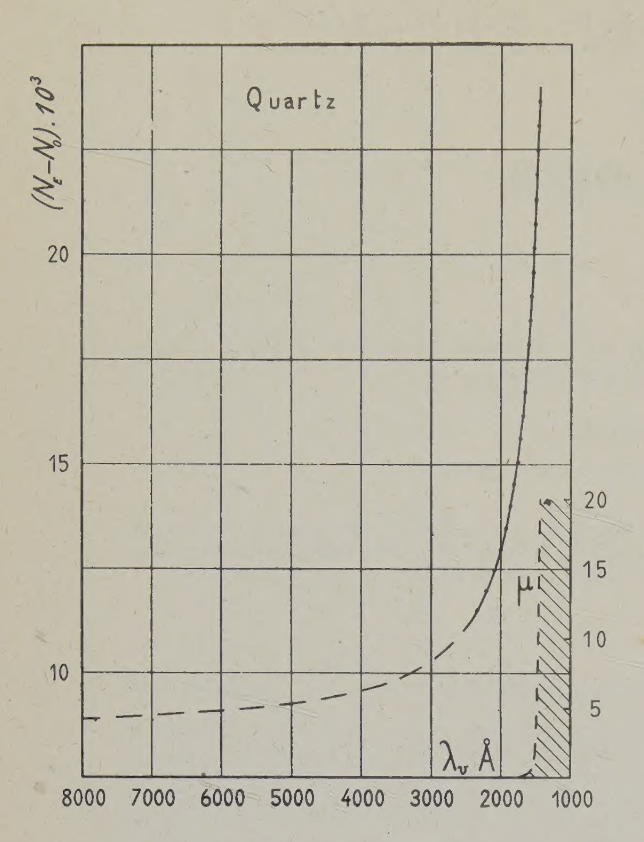


Fig. 1. — Biréfringence du quartz dans l'ultraviolet lointain (R. Servant).

faisaient au contraire intervenir des fréquences d'absorption distinctes et s'écrivaient :

$$\frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} = \frac{5{,}234 \,.\, 10^{30}}{17{,}500 \,.\, 10^{30} - \frac{c^2}{\lambda^2}} + \frac{0{,}0600 \,.\, 10^{30}}{5{,}031 \,.\, 10^{30} - \frac{c^2}{\lambda^2}},$$

$$\frac{n_e^2 - 1}{n_e^2 + 2} = \frac{5{,}234 \,.\, 10^{30}}{17{,}259 \,.\, 10^{30} - \frac{c^2}{\lambda^2}} + \frac{0{,}0600 \,.\, 10^{30}}{5{,}002 \,.\, 10^{30} - \frac{c^2}{\lambda^2}}$$

(c, vitesse de la lumière).

Ces formules, qui traduisaient avec une extrême précision les valeurs de la biréfringence dans le spectre visible et l'ultraviolet ordinaire, devenaient tout à fait insuffisantes quand on les extrapolait dans la région de Schumann où *les écarts atteignaient 10 et même 15 pour 100*. Leur révision s'imposait. Cependant, étant donné l'*arbitraire* qui subsiste toujours dans la détermination des longueurs d'onde propres *dès que les formules ne sont pas à un seul terme*, il était difficile de choisir entre les deux types de formules (c'est-à-dire de se prononcer sur l'origine du dichroïsme). Leur révision ne pouvait être qu'empirique; je me bornais donc, à ce propos, à quelques remarques (*loc. cit.*).

Mais, par la suite, il me parut intéressant de chercher directement, dans une autre voie, une formule de dispersion nouvelle. J'arrivai finalement [2] à la formule simple suivante, où $(N_e - N_0)$ représente la biréfringence et λ_v la longueur d'onde par rapport au vide exprimée en Å :

$$10^3 . (N_e - N_0) = 8{,}733 \,.\, \frac{10^{-6} . \lambda_v^2}{10^{-6} . \lambda_v^2 - 1{,}325}.$$

Cette formule est valable dans l'intervalle 8000-1500 Å avec une erreur moyenne inférieure à 5/1000e.

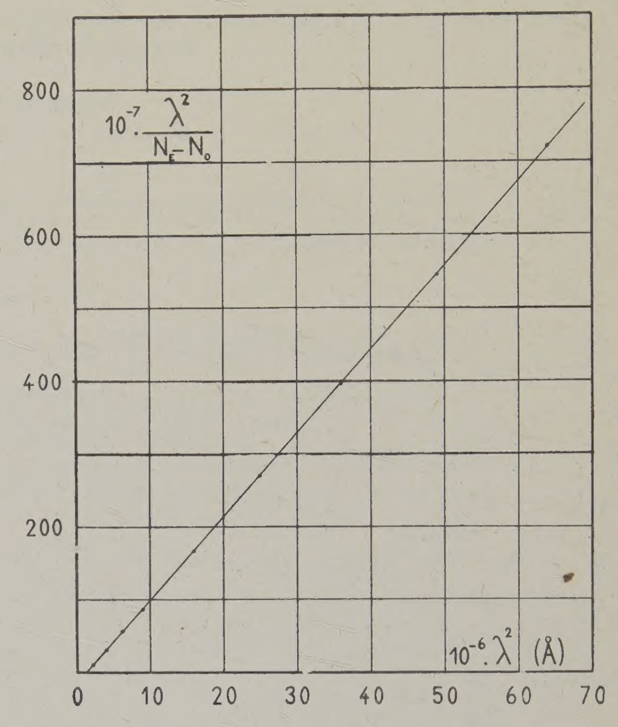


Fig. 2. — Interprétation graphique de la dispersion de biréfringence du quartz (R. Servant).

D'autre part, elle est susceptible d'une interprétation graphique immédiate : soit deux axes de coordonnées rectangulaires, si l'on porte en abscisses les carrés des longueurs d'onde et en ordonnées les quantités $\frac{\lambda^2}{N_e - N_0}$, les points représentatifs sont sur une droite.

Il est à noter que la longueur d'onde **réduite** « active » est identique à celle qui intervient pour le pouvoir rotatoire, comme je l'ai montré par ailleurs [3].

2. Nouvelle formule de dispersion pour les effets Kerr et Cotton-Mouton. — Il me parut intéressant de voir si une formule analogue à celle

que j'avais trouvée pour le quartz, ne s'appliquerait pas aux biréfringences électriques et magnétiques. On sait, en effet, leur analogie avec la biréfringence cristalline. Si l'on place une substance transparente dans un champ électrique E ou magnétique H, elle devient biréfringente et se comporte comme un cristal *uniaxe* dont l'axe optique serait parallèle au champ. C'est ce qui constitue le phénomène de Kerr [4] ou de Cotton-Mouton [5]. La biréfringence est proportionnelle au carré du champ

$$n_e - n_0 = \mathcal{B}\lambda E^2, \qquad n_e - n_0 = \mathcal{C}\lambda H^2$$

et les coefficients $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont appelés *constantes de Kerr et de Cotton-Mouton.*

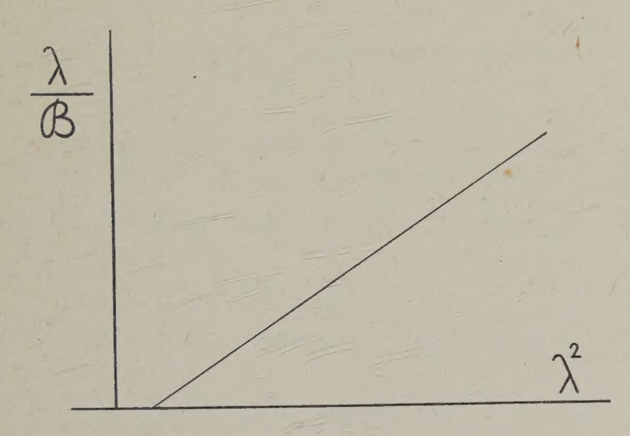


Fig. 3.

Aucune formule *directe* n'avait été proposée jusqu'ici pour traduire la dispersion de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ avec la longueur d'onde. On employait des formules faisant intervenir l'indice de réfraction, comme la formule de Havelock [6] :

$$\frac{\mathcal{B}\lambda n}{(n^2-1)^2} = \text{const.}, \qquad \frac{\mathcal{C}\lambda n}{(n^2-1)^2} = \text{const.}$$

Par analogie avec la formule que j'avais trouvée pour le quartz (et qui, d'ailleurs, s'applique à d'autres cristaux, comme le spath par exemple), il me parut intéressant d'essayer les formules de dispersion

$$\boxed{\mathcal{B} = b\,\frac{\lambda}{\lambda^2-\lambda_0^2}, \qquad \mathcal{C} = c\,\frac{\lambda}{\lambda^2-\lambda_1^2}} \qquad (1)$$

où λ est la longueur d'onde et b, c, λ_0 et λ_1 sont des constantes.

Je trouvai [7] que ces formules permettaient de représenter de façon satisfaisante, et en général, beaucoup *mieux que la formule de Havelock* les résultats expérimentaux. Elles ont, d'autre part, l'avantage d'une interprétation géométrique simple : si, en effet, on réalise une anamorphose graphique en portant en abscisses le carré des longueurs d'onde et en ordonnées les quantités $\frac{\lambda}{\mathcal{B}}$ ou $\frac{\lambda}{\mathcal{C}}$, on obtient une droite (*fig.* 3). Cette droite permet d'évaluer directement les quantités b et λ_0 (ou c et λ_1) que l'on peut ensuite achever de déterminer avec précision par les méthodes habituelles de calculs d'erreurs. En somme, elle joue pour les biréfringences le même rôle que le « graphique de Biot » pour le pouvoir rotatoire.

PREMIÈRE PARTIE.

Justification expérimentale de la formule proposée.

Il est facile — en utilisant par exemple la méthode graphique qui est très rapide — de constater que ma formule s'applique avec précision aussi bien aux gaz qu'aux liquides et aux solutions. Je vais le montrer ici sur quelques exemples se rapportant de préférence à des données récentes.

Biréfringence électrique du gaz carbonique. — Elle a été étudiée par Quarles [8] entre 4000 Å et 7000 Å. Il est facile, d'après ses données, d'établir que la constante de Kerr (à 17° et sous la pression atmosphérique) peut s'écrire

$$\mathcal{B} = 1{,}445.10^{-10}\,\frac{\lambda.10^{-3}}{\lambda^2.10^{-6}-0{,}5}$$

(où λ est exprimée en Å), avec une erreur moyenne de 1 pour 100, c'est-à-dire de l'ordre des erreurs expérimentales.

Biréfringence électrique de l'hexane. — La figure 4 représente les résultats des mesures de Szivessy et Dierkesmann [9] dans le visible et l'ultraviolet. La courbe en pointillé donne les valeurs calculées par la formule de Havelock. La figure 5 donne l'interprétation des résultats par ma formule. On trouve :

$$\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}_{5460}} = 5{,}15\,\frac{\lambda.10^{-3}}{\lambda^2.10^{-6}-1{,}6}$$

(où λ est exprimée en Å) avec une erreur moyenne inférieure à 1 pour 100 dans l'intervalle 5800-2500 Å, alors que les écarts à la loi de Havelock dépassent 4 pour 100

Biréfringence électrique de l'oxygène liquide. — Elle a été mesurée récemment [10] par Guillien. On trouve d'après ses mesures que, dans le spectre visible pour T = 80° K, on a

$$\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}_{5460}} = 5{,}28\,\frac{\lambda.10^{-3}}{\lambda^2.10^{-6}-1{,}2}$$

avec une erreur moyenne de 5 pour 1000, alors que les écarts à la loi de Havelock atteignent 1 à 2 pour 100.

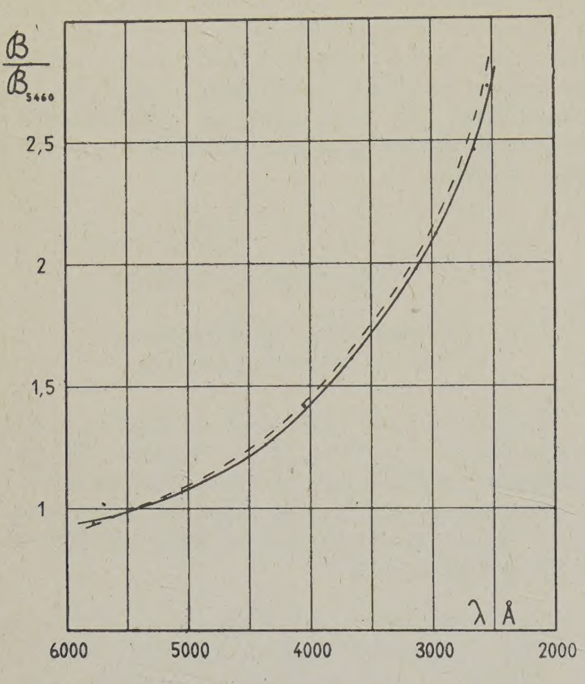


Fig. 4. — Biréfringence électrique de l'hexane (d'après Szivessy et Dierkesmann).

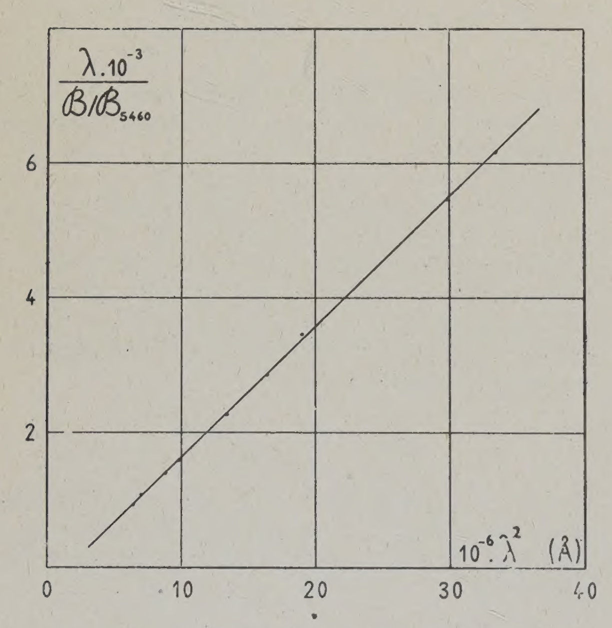


Fig. 5. — Interprétation des résultats sur l'hexane par la méthode du graphique rectiligne (R. Servant).

Biréfringence électrique du chlorobenzène. — Elle a été étudiée dans le visible et l'ultraviolet par Szivessy et Dierkesmann [9] et dans l'infra-rouge par Ingersoll et Winch [11]. Les figures 6 et 7 représentent les résultats et leur interprétation graphique.

Là encore, on peut écrire les résultats sous la forme

$$\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}_{5460}} = 4,89\,\frac{\lambda.10^{-3}}{\lambda^2.10^{-6} - 3,2},$$

valable de 12 000 Å à 3 000 Å avec une erreur moyenne de 0,7 pour 100.

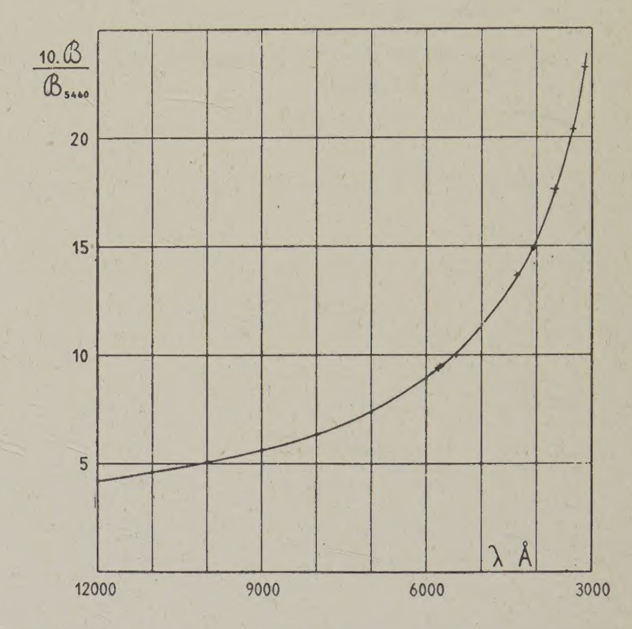


Fig. 6. — Biréfringence électrique du chlorobenzène dans l'IR, le visible et l'UV [d'après Szivessy-Dierkesmann (×) et Ingersoll-Winch (.)].

Biréfringence magnétique de l'oxyde azotique gazeux. — Les résultats de Bizette et Tsaï [12] sur la biréfringence magnétique de NO peuvent aussi s'écrire

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}_{5460}} = 5,29\,\frac{\lambda.10^{-3}}{\lambda^2.10^{-6} - 0,7}$$

(où λ est exprimée en Å) avec une erreur moyenne inférieure à 0,5 pour 100.

Biréfringence magnétique du nitrate céreux en solution aqueuse. — D'après les mesures de Haenny [13], on trouve de même,

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}_{5460}} = 4,405\,\frac{\lambda.10^{-3}}{\lambda^2.10^{-6} - 5,7}$$

avec une erreur moyenne inférieure à 1 pour 1000.

Biréfringence magnétique de l'oxygène liquide. — On peut traduire les mesures de Lainé [14]

sur l'oxygène liquide (à T = 90° K) par la formule

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}_{5460}} = 5,05 \frac{\lambda . 10^{-3}}{\lambda^2 . 10^{-6} - 2,2}$$

avec une erreur moyenne de 1 pour 1000.

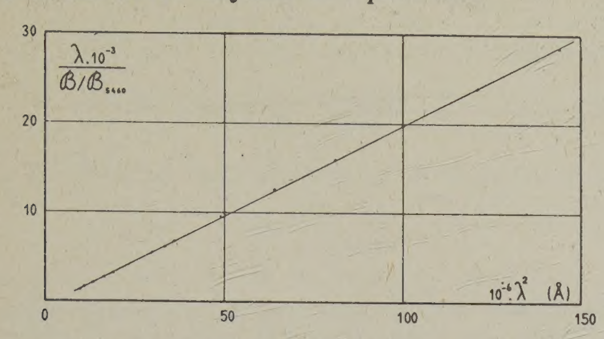


Fig. 7. — Interprétation graphique des résultats sur le chlorobenzène (R. Servant).

Biréfringence magnétique du β-méthylnaphtalène et du phénanthrène fondus. — La

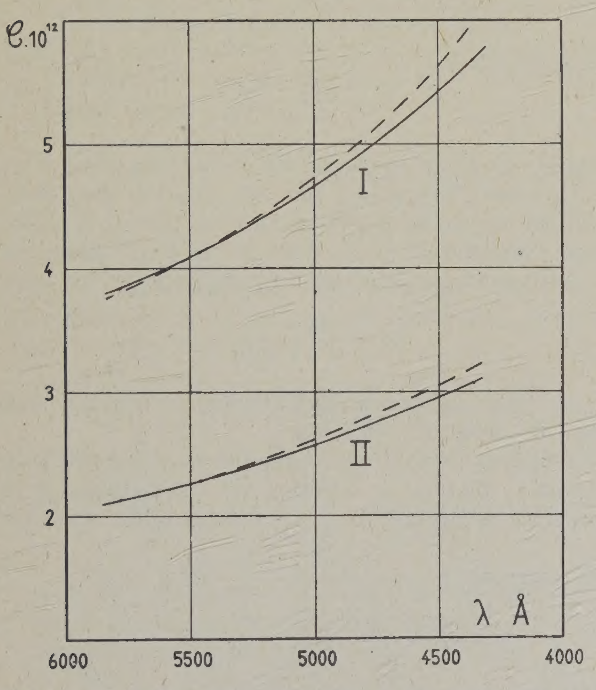


Fig. 8. — Biréfringence magnétique du phénanthrène (I) et du β-méthylnaphtalène (II) fondus (Salceanu).

figure 8 reproduit les résultats obtenus par Salceanu [15]. On a figuré en pointillé les valeurs de $\mathcal{C}$ calculées par la formule de Havelock. La figure 9 donne l'interprétation des résultats par ma formule. On peut écrire pour les deux substances

$$\mathcal{C} . 10^{12} = 11,13 \frac{\lambda . 10^{-3}}{\lambda^2 . 10^{-6} - 3,2},$$

$$\mathcal{C} . 10^{12} = 19,53 \frac{\lambda . 10^{-3}}{\lambda^2 . 10^{-6} - 4}$$

avec une erreur moyenne inférieure à 1 pour 1000, alors que les écarts à la loi de Havelock atteignent respectivement 4 et 6 pour 100.

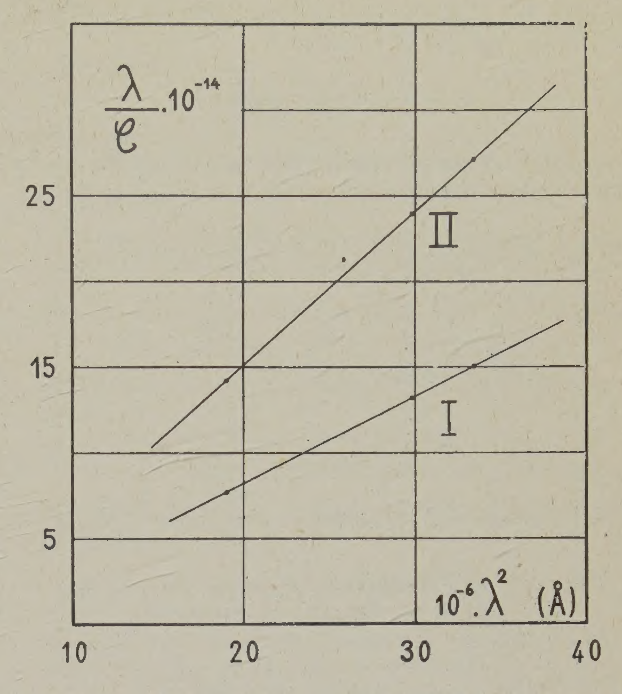


Fig. 9. — Interprétation graphique des résultats sur le β-méthylnaphtalène et phénanthrène fondus (R. Servant).

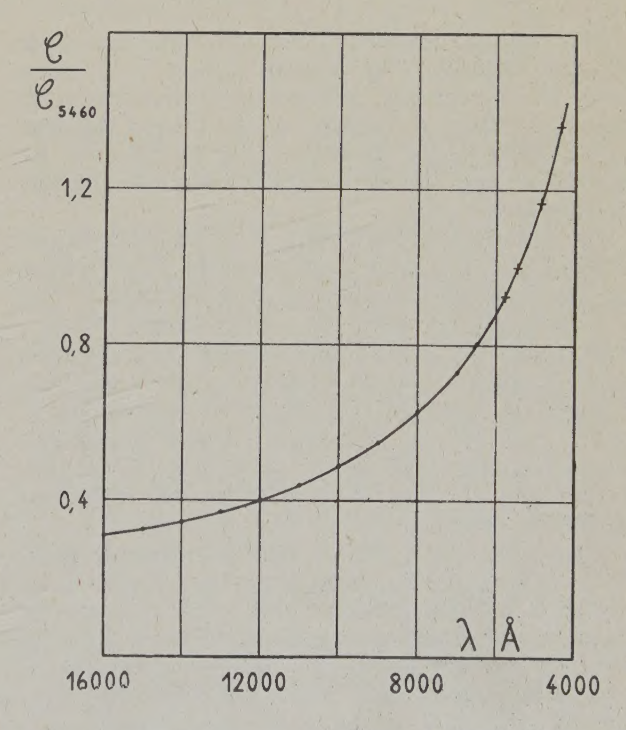


Fig. 10. — Biréfringence magnétique du nitrobenzène dans le visible et l'infrarouge [d'après Cotton-Mouton (×) et Davis (.)].

Biréfringence magnétique du nitrobenzène. — Elle a été étudiée dans le spectre visible par Cotton et Mouton [16] et dans l'infrarouge par Davis [17]. La figure 10 représente leurs résultats. Ils peuvent s'interpréter par la méthode du graphique rectiligne (*fig.* 11) et s'écrire

$$\mathcal{C}.10^{12} = 12,74 \frac{\lambda.10^{-3}}{\lambda^2.10^{-6} - 4,3}$$

avec une erreur moyenne inférieure à 0,7 pour 100 dans l'intervalle spectral 4 000-16 000 Å.

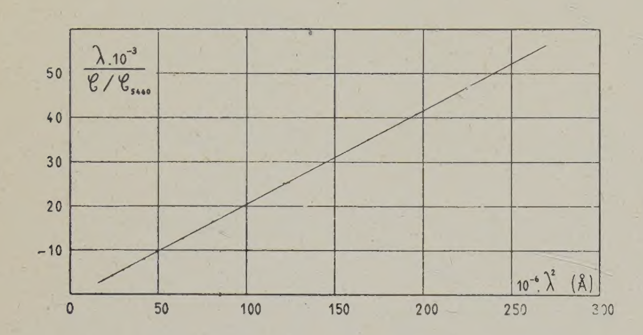


Fig. 11. — Interprétation graphique des résultats sur le nitrobenzène (R. Servant).

DEUXIÈME PARTIE.

Interprétation théorique.

Nous venons de voir la justification expérimentale de ma formule. J'ai montré depuis [18] qu'on peut en donner une interprétation théorique. On peut, en effet, la déduire de la *théorie classique de l'orientation* en modifiant convenablement les hypothèses qui conduisent d'habitude à la formule de Havelock.

La théorie de l'orientation a été développée d'abord par Langevin [19]. Born [20] l'a étendue au cas des molécules polaires et de Mallemann [21] l'a généralisée à celui des corps actifs. D'autre part, Gans [22] l'a reliée aux théories sur la diffusion de la lumière. Il a été suivi dans cette voie par Raman et Krishnan [23], Stuart et ses collaborateurs [24] et de nombreux autres physiciens. Enfin Kronig [25], Born [26], Van Vleck [27], Serber [28] et Neugebauer [29] en ont développé la théorie quantique.

Je ne reviendrai pas ici sur ces théories; je ne ferai qu'en rappeler les résultats principaux et les utiliser à la démonstration de ma formule. Je m'attacherai à uniformiser les notations, de façon à mettre bien en évidence le parallélisme des effets Kerr et Cotton-Mouton (et aussi leur différence).

1. Notations. — Dans l'*hypothèse de Langevin*, les éléments de symétrie des molécules sont ceux d'un ellipsoïde. Quand le champ électrique (variable) de l'onde incidente est dirigé suivant l'un des axes, le moment électrique induit a même direction et lui est proportionnel. Nous désignerons par A, B, C les coefficients de proportionnalité dans les trois directions. Ce sont les ***polarisabilités optiques*** ou ***réfractivités***. L'***anisotropie optique*** δ sera définie par

$$\delta^2 = \frac{(A-B)^2 + (B-C)^2 + (C-A)^2}{2(A+B+C)^2}.$$

Si la molécule a un axe optique ($B = C$) on a plus simplement,

$$\delta = \frac{A-B}{A+2B}.$$

Les réfractivités principales A, B, C varient avec la fréquence de l'onde incidente. Lorsque cette fréquence tend vers zéro, elles tendent vers des limites, dites *polarisabilités électrostatiques*, que nous désignerons par A_E, B_E, C_E. L'*anisotropie électrique* δ_E de la molécule sera définie par l'égalité

$$\delta_E^2 = \frac{(A_E - B_E)^2 + (B_E - C_E)^2 + (C_E - A_E)^2}{2(A_E + B_E + C_E)^2}$$

qui se réduit à

$$\delta_E = \frac{A_E - B_E}{A_E + 2B_E}$$

dans le cas d'une molécule de révolution ($B_E = C_E$). Enfin, nous désignerons par A_M, B_M, C_M les *polarisabilités magnétiques* principales et par δ_M l'*anisotropie magnétique*. Ainsi, dans le cas d'une molécule de révolution au point de vue magnétique, on aura

$$\delta_M = \frac{A_M - B_M}{A_M + 2B_M}.$$

Ceci posé, la théorie de l'orientation conduit aux résultats généraux suivants :

Désignons par $\mathcal{B}$ la constante de Kerr et λ la longueur d'onde, n l'indice de réfraction, ε la constante diélectrique, γ la *polarisabilité moyenne* des molécules $\left(\gamma = \frac{A+B+C}{3}\right)$. On a

$$\mathcal{B} = \frac{(n^2-1)(n^2+2)}{4n\lambda}\left(\frac{\varepsilon+2}{3}\right)^2 \frac{\theta_1+\theta_2}{\gamma}$$

avec

$$\theta_1 = \frac{1}{45kT} \times [(A-B)(A_E-B_E) + (B-C)(B_E-C_E) + (C-A)(C_E-A_E)],$$

$$\theta_2 = \frac{1}{45k^2T^2} \times [(A-B)(M_1^2-M_2^2) + (B-C)(M_2^2-M_3^2) + (C-A)(M_3^2-M_1^2)],$$

où k est la constante de Boltzmann, T la température absolue et M_1, M_2, M_3 les composantes du moment électrique permanent $\vec{M}$ de la molécule suivant ses trois directions principales.

On a de même pour la constante $\mathcal{C}$ de Cotton-Mouton

$$\mathcal{C} = \frac{(n^2-1)(n^2+2)}{4n\lambda}\left(\frac{\mu+2}{3}\right)^2 \frac{\theta_1+\theta_2}{\gamma},$$

avec

$$\theta_1 = \frac{1}{45\,kT} \times [(A-B)(A_M-B_M)+(B-C)(B_M-C_M)+(C-A)(C_M-A_M)],$$

$$\theta_2 = \frac{1}{45\,k^2T^2} \times [(A-B)(\mathcal{M}_1^2-\mathcal{M}_2^2) + (B-C)(\mathcal{M}_2^2-\mathcal{M}_3^2)+(C-A)(\mathcal{M}_3^2-\mathcal{M}_1^2)],$$

où μ représente la perméabilité magnétique [1] et $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$ les composantes du moment magnétique permanent $\vec{\mathcal{M}}$, suivant les trois directions principales de la molécule.

Voyons maintenant comment, à partir de ces résultats, on peut justifier la formule que j'ai proposée.

2. Biréfringence électrique des gaz. — 1° *Pour les gaz homopolaires* on a $\theta_2 = 0$. D'autre part, en admettant que les molécules sont de révolution, on peut écrire

$$\begin{aligned}\Sigma(A-B)(A_E-B_E) &= 2(A-B)(A_E-B_E)\\ &= 2\delta\delta_E(A+2B)(A_E+2B_E)\\ &= 18\,\delta\delta_E\gamma\frac{\varkappa_E}{N},\end{aligned}$$

où $\varkappa_E$ est la susceptibilité électrique (par unité de volume) et N le nombre de molécules par centimètre cube. Il s'en suit

$$\mathcal{B}_1 = 3\frac{(n^2-1)}{10\lambda\,kTN}\varkappa_E\delta\delta_E.$$

Si l'on suppose que l'indice de réfraction suit la loi de Sellmeier

$$n^2-1 = (n_{\lim}^2-1)\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_0^2}$$

et si l'on admet que l'anisotropie optique est constante, on voit que l'équation donnant $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\mathcal{B}_1 = b_1\frac{\lambda}{\lambda^2-\lambda_0^2}$$

si l'on pose

$$\boxed{b_1 = \frac{3(n_{\lim}^2-1)\,\delta\delta_E\varkappa_E}{10\,kTN}}. \qquad (2)$$

Remarque. — Ce résultat peut se mettre sous une autre forme : admettons l' « hypothèse de Gans »

$$\frac{A_E}{A} = \frac{B_E}{B} = \frac{C_E}{C} = a.$$

Dans ces conditions $\delta = \delta_E$ et comme $\varkappa_E = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}$ on en déduit

$$b_1 = \frac{3(n_{\lim}^2-1)(\varepsilon-1)}{40\pi\,kTN}\delta^2. \qquad (2')$$

2° *Pour les gaz hétéropolaires*, évaluons le terme de biréfringence $\mathcal{B}_2$ provenant du moment électrique permanent $\vec{M}$. Supposons, pour simplifier, que les molécules possèdent un axe optique ($B = C$) et que $\vec{M}$ soit incliné de l'angle α sur cet axe. On a

$$\begin{aligned}\Sigma(A-B)(M_1^2-M_2^2) &= 2(A-B)(M_1^2-M_2^2)\\ &= 3\,\delta\gamma M^2(3\cos^2\alpha-1).\end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{B}_2 = \frac{(n^2-1)(3\cos^2\alpha-1)}{20\lambda\,k^2T^2}M^2\delta \quad (^2).$$

Si l'on suppose que l'indice de réfraction suit la loi de Sellmeier

$$n^2-1 = (n_{\lim}^2-1)\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_0^2}$$

et si l'on admet que l'anisotropie optique est constante, on voit que $\mathcal{B}_2$ est de la forme

$$\mathcal{B}_2 = b_2\frac{\lambda}{\lambda^2-\lambda_0^2}$$

à condition de poser

$$\boxed{b_2 = \frac{(n_{\lim}^2-1)(3\cos^2\alpha-1)}{20\,k^2T^2}M^2\delta}. \qquad (3)$$

3° Enfin, dans le cas général où $\mathcal{B}$ est de la forme $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$, il faudra prendre $b = b_1 + b_2$.

3. Biréfringence électrique des liquides. — Ce cas est plus compliqué car dans les liquides les propriétés *moléculaires* s'effacent devant les propriétés *effectives* [30]. Elles subissent l'influence de la polarisation et de l'orientation des molécules voisines. La relation entre l'anisotropie optique et le facteur de dépolarisation devient beaucoup moins simple. On se reportera aux travaux de Raman et Krishnan, Rocard [31], Stuart, etc. Nous nous contenterons ici d'un exposé très schématique.

1° Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un *liquide homopolaire*. Écrivant encore

$$\Sigma(A-B)(A_E-B_E) = 18\,\delta\delta_E\gamma\frac{\varkappa_E}{N}$$

[1] On a, en désignant par $\varkappa_M$ la susceptibilité magnétique (par unité de volume) :

$$\left(\frac{\mu+2}{3}\right)^2 = \left(1+\frac{4\pi\varkappa_M}{3}\right)^2.$$

[2] On voit, d'après cette formule, que si A est l'axe de plus grande réfractivité [$A > (B = C)$], la constante de Kerr est positive quand $\vec{M}$ est dirigé dans sa direction, et négative quand il lui est perpendiculaire :

$$(\mathcal{B} < 0 \quad \text{si } \delta > 0 \quad \text{et} \quad \alpha = 90°).$$

(où toutes les quantités se rapportent cette fois au liquide), il vient

$$\mathcal{B}'_1 = \frac{(n^2-1)(n^2+2)(\varepsilon+2)^2}{90\,n\lambda kTN}\,\delta\delta_E\varkappa_E.$$

Si nous supposons que l'indice de réfraction obéit à la loi de Lorentz-Lorenz :

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{n^2_{\text{lim}}-1}{n^2_{\text{lim}}+2}\,\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_0^2} \quad (^3)$$

nous voyons que $\mathcal{B}'_1$ peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{B}'_1 = b'_1\,\frac{\lambda}{\lambda^2-\lambda_0^2}$$

en posant

$$b'_1 = \frac{3(n^2_{\text{lim}}-1)\delta\delta_E\varkappa_E}{10kTN}\,\frac{(n^2+2)^2}{9n}\,\frac{(\varepsilon+2)^2}{3(n^2_{\text{lim}}+2)},$$

ce que l'on peut écrire symboliquement :

$$\boxed{b'_1 = \frac{(n^2+2)^2}{9n}\,\frac{(\varepsilon+2)^2}{3(n^2_{\text{lim}}+2)}\,(b_1)_{\text{liq}}} \qquad (4)$$

toutes les grandeurs se rapportant maintenant au liquide.

2° Supposons qu'il s'agisse d'un *liquide hétéropolaire*. Avec les mêmes hypothèses que dans le cas des gaz, on trouvera

$$\mathcal{B}'_2 = \frac{(n^2-1)(n^2+2)(\varepsilon+2)^2}{540\,n\lambda k^2T^2}\,(3\cos^2\alpha-1)M^2\delta,$$

qui est bien de la forme

$$\mathcal{B}'_2 = b'_2\,\frac{\lambda}{\lambda^2-\lambda_0^2}$$

si l'on pose

$$b'_2 = \frac{(n^2_{\text{lim}}-1)(3\cos^2\alpha-1)M^2\delta}{20k^2T^2}\,\frac{(n^2+2)^2}{9n}\,\frac{(\varepsilon+2)^2}{3(n^2_{\text{lim}}+2)},$$

ce qui peut s'écrire symboliquement :

$$\boxed{b'_2 = \frac{(n^2+2)^2}{9n}\,\frac{(\varepsilon+2)^2}{3(n^2_{\text{lim}}+2)}\,(b_2)_{\text{liq}}}\,. \qquad (5)$$

3° Enfin, dans le cas général où $\mathcal{B}'$ est de la forme $\mathcal{B}'_1+\mathcal{B}'_2$, il faut prendre $b'=b'_1+b'_2$.

Remarque. — En toute rigueur $b'_1\,b'_2$ et b' ne sont plus qu'*approximativement* constants. En effet, ils contiennent le facteur $\frac{(n^2+2)^2}{9n}$. Mais ce facteur a une variation relative tout à fait négligeable vis-à-vis de celle de la biréfringence. Pour le chlorobenzène par exemple, il varie de 1,3 à 1,4 dans l'intervalle 12 000-3000 Å, tandis que la constante de Kerr passe de 0,4 $\mathcal{B}_0$ à 2,3 $\mathcal{B}_0$. On peut donc pratiquement négliger sa variation devant celle du terme en $\frac{\lambda}{\lambda^2-\lambda_0^2}$ exactement comme dans les théories quantiques du pouvoir rotatoire [32] on néglige la dispersion du facteur $\frac{n^2+2}{3}$ vis-à-vis de celle des termes de Drude en $\frac{1}{\lambda^2-\lambda_0^2}$. D'autre part, il ne faut pas oublier que ce facteur est assez arbitraire, car il dérive de l'utilisation de la loi de Lorentz-Lorenz et de Mallemann en particulier a montré [33] qu'on est loin de pouvoir toujours attribuer au champ de polarisation interne la valeur que suppose cette loi. On a proposé bien des *invariants* de réfraction [34], et celui de Gladstone par exemple ne conduirait pas à ce facteur. Donc on peut considérer que la loi expérimentale $\mathcal{B}'=b'\cdot\frac{\lambda}{\lambda^2-\lambda_0^2}$ est parfaitement justifiée dans le cas des liquides, étant entendu que dans l'application des formules il faut prendre pour n une valeur moyenne.

4. Biréfringence magnétique des gaz. — 1° *Supposons que le gaz soit diamagnétique.* Le même raisonnement montre que, dans le cas où les ellipsoïdes optique et magnétique ont même axe, la constante de Cotton-Mouton s'écrit

$$\mathcal{C}_1 = 3\,\frac{(n^2-1)}{10\lambda kTN}\,\varkappa_M\delta\delta_M,$$

où $\varkappa_M$ est la susceptibilité magnétique (par unité de volume). Si nous supposons que l'indice de réfraction suit la loi de Sellmeier et si nous admettons l'anisotropie optique constante, on trouve que la constante de Cotton-Mouton est bien de la forme

$$\mathcal{C}_1 = c_1\,\frac{\lambda}{\lambda^2-\lambda_0^2}$$

si l'on pose

$$\boxed{c_1 = \frac{3(n^2_{\text{lim}}-1)\delta\delta_M\varkappa_M}{10kTN}} \quad (^4) \qquad (6)$$

2° *Pour un gaz paramagnétique*, le terme de biréfringence provenant du moment permanent $\vec{\mathfrak{M}}$

(³) On doit considérer ici n^2_{lim} comme une grandeur expérimentale déduite de l'étude même de la réfraction. Dans le cas des molécules polaires n^2_{lim} peut différer notablement de ε. Ainsi pour le nitrobenzène par exemple

$$\frac{n^2_{\text{lim}}-1}{n^2_{\text{lim}}+2} = 0{,}3 \qquad \text{alors que} \qquad \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = 0{,}9.$$

(⁴) Comme $\varkappa_M$ est < 0, on voit d'après cette formule, que la constante de Cotton-Mouton est positive si la direction de réfractivité maximum $A > (B = C)$ coïncide avec la direction de susceptibilité magnétique minimum $A_M < (B_M = C_M)$.

s'écrit, dans le cas d'une molécule ayant un *axe* optique incliné de α sur $\overrightarrow{\mathcal{M}}$

$$\mathcal{C}_2 = \frac{(n^2 - 1)(3\cos^2\alpha - 1)}{20\lambda k^2 T^2}\mathcal{M}^2\delta.$$

Toujours avec les mêmes hypothèses, $\mathcal{C}_2$ se réduit à

$$\mathcal{C}_2 = c_2\frac{\lambda}{\lambda^2 - \lambda_0^2}$$

à condition de poser

$$\boxed{c_2 = \frac{(n^2_{\text{lim}} - 1)(3\cos^2\alpha - 1)}{20 k^2 T^2}\mathcal{M}^2\delta}. \qquad (7)$$

3° Dans le cas général

$$c = c_1 + c_2.$$

Remarque. — Les formules précédentes restent à expliciter pour tenir compte des résultats des théories quantiques. Dans le *cas* (*a*) *de Hund* par exemple, il faut remplacer $\mathcal{M}$ par $\mathcal{M}_B(\Lambda + 2\Sigma)$ et tenir compte dans l'expression de l'anisotropie magnétique de la contribution des « termes de haute fréquence » du moment, introduits par Van Vleck.

5. Biréfringence magnétique des liquides. — 1° *Supposons d'abord le liquide diamagnétique.* On montre encore que la constante de Cotton-Mouton peut s'écrire

$$\mathcal{C}'_1 = c'_1\frac{\lambda}{\lambda^2 - \lambda_0^2},$$

à condition de poser

$$\boxed{c'_1 = \frac{(n^2 + 2)^2}{9n}\frac{(\mu + 2)^2}{3(n^2_{\text{lim}} + 2)}(c_1)_{\text{liq}}} \qquad (8)$$

qui se réduit pratiquement à

$$c'_1 = \frac{(n^2 + 2)^2}{3n(n^2_{\text{lim}} + 2)}(c_1)_{\text{liq}}$$

car la perméabilité μ est toujours très voisine de 1.

2° *Si le liquide est paramagnétique,* le terme de biréfringence provenant du moment permanent peut s'écrire toujours avec les mêmes hypothèses

$$\mathcal{C}'_2 = c'_2\frac{\lambda}{\lambda^2 - \lambda_0^2}$$

si l'on pose

$$\boxed{c'_2 = \frac{(n^2 + 2)^2}{9n}\frac{(\mu + 2)^2}{3(n^2_{\text{lim}} + 2)}(c_2)_{\text{liq}}}. \qquad (9)$$

Cette expression se réduit pratiquement à

$$c'_2 = \frac{(n^2 + 2)^2}{3n(n^2_{\text{lim}} + 2)}(c_2)_{\text{liq}} \qquad (9')$$

car μ est toujours très voisin de 1.

3° Enfin, dans le cas général,

$$c' = c'_1 + c'_2.$$

6. Application des résultats précédents. — BIRÉFRINGENCE ÉLECTRIQUE DU GAZ CARBONIQUE. — Nous avons vu que la constante de Kerr du gaz carbonique, à 17° et sous la pression atmosphérique, peut s'écrire

$$\mathcal{B} = 1,445.10^{-15}\frac{\lambda}{\lambda^2 - 0,5.10^{-10}} \quad \text{C. G. S.}$$

Appliquons la formule (2′) en posant

$$k = 1,38.10^{-16}, \qquad \mathcal{N} = 6,02.10^{23}, \qquad \varepsilon - 1 = 9.10^{-4}$$

(d'après Watson, Rao et Ramaswamy),

$$n^2_{\text{lim}} - 1 = 8.10^{-4}$$

(d'après les mesures de Watson et Ramaswamy), d_0 (par rapport à l'air) = 1,53.

On trouve $\delta^2 = 0{,}086$, ce qui donne pour le facteur de dépolarisation ρ $\left(\text{défini par } \delta^2 = \frac{5\rho}{6 - 7\rho}\right)$ la valeur

$$\rho = 0{,}09$$

en bon accord avec la valeur expérimentale la plus récente (Cabannes et Rousset) :

$$\rho = 0{,}08.$$

BIRÉFRINGENCE ÉLECTRIQUE DE L'HEXANE. — Nous avons trouvé pour l'hexane

$$\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}_{5460}} = 5,15\frac{\lambda.10^{-3}}{\lambda^2.10^{-6} - 1,6}.$$

Adoptant pour $\mathcal{B}_{5460}$ la valeur $6{,}0.10^{-9}$ (Otterbein), il vient

$$\mathcal{B} = 30{,}9.10^{-14}\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1,6.10^{-10}} \quad \text{C. G. S.}$$

Ainsi,

$$b'_1 = 30{,}9.10^{-14}.$$

Appliquons la formule (4) en posant

$$k = 1,38.10^{-16}, \qquad \mathcal{N} = 6,02.10^{23}, \qquad \varepsilon = 1,8,$$

$$\frac{n^2_{\text{lim}} - 1}{n^2_{\text{lim}} + 2} = 0{,}22, \qquad \frac{(n^2 + 2)^2}{n} = 11,15, \qquad d = 0{,}7.$$

On en déduit

$$\delta^2 = 2,4.10^{-3}$$

en accord satisfaisant avec le nombre

$$\delta^2_{\text{liq}} = 2,7.10^{-3}$$

que l'on peut déduire des mesures [35] du facteur de dépolarisation de l'hexane liquide (en admettant la validité d'une formule du « type Vessot-King »).

BIRÉFRINGENCE MAGNÉTIQUE DU NITROBENZÈNE. — Nous avons trouvé pour le nitrobenzène,

$$\mathcal{C} = 12{,}74.10^{-17}\frac{\lambda}{\lambda^2 - 4,3.10^{-10}} \quad \text{C. G. S.}$$

Donc

$$c = 12,74 \cdot 10^{-17}.$$

Appliquons la formule (8) en posant

$$k = 1,38 \cdot 10^{-16}, \quad \mathfrak{N} = 6,02 \cdot 10^{23}, \quad \chi = -0,5 \cdot 10^{-6},$$

$$\frac{(n^2+2)^2}{n} = 12,44, \quad \frac{n_{\text{lim}}^2 - 1}{n_{\text{lim}}^2 + 2} = 0,304.$$

on trouve

$$\delta\delta_M = -0,13.$$

Supposons avec Ramanathan [36] $A < (B = C)$, donc $\delta < 0$, comme les mesures de dépolarisation donnent $\delta^2 = 5 \cdot 10^{-2}$, on en déduit

$$\delta_M = 0,58,$$

ce qui donne comme rapport de la polarisabilité magnétique maxima A_M à la polarisabilité magnétique moyenne $\gamma_M \left(= \frac{A_M + 2B_M}{3}\right)$ la valeur

$$\frac{A_M}{\gamma_M} = 2,16$$

en bon accord avec la valeur 2,26 trouvée précédemment par Chinchalkar [37] par une autre voie.

7. Formule de Havelock et formule nouvelle pour la dispersion des biréfringences électrique et magnétique. — Revenons maintenant sur la comparaison de la formule de Havelock avec la formule que j'ai proposée, afin de bien dégager ce qu'elles supposent respectivement du point de vue théorique.

Soit A, B, C les réfractivités principales des molécules. La formule de Havelock se déduit de la théorie de Langevin-Born en admettant que les quantités

$$\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right), \quad \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right), \quad \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)$$

ne varient pas avec la longueur d'onde et que les termes

$$\frac{(A+B+C)^2}{AB}, \quad \frac{(A+B+C)^2}{BC}, \quad \frac{(A+B+C)^2}{CA}$$

restent pratiquement constants et égaux à 9. Ceci ne suppose pas que l'anisotropie optique, définie par

$$\delta^2 = \frac{(A-B)^2 + (B-C)^2 + (C-A)^2}{2(A+B+C)^2}$$

soit constante.

Au contraire, c'est cette hypothèse de l'invariance de l'anisotropie optique δ qui a servi à justifier ma formule. Ainsi par exemple, pour les gaz homopolaires diamagnétiques, les constantes de Kerr et de Cotton-Mouton peuvent s'écrire

$$\mathcal{B} = \frac{3(n_{\text{lim}}^2 - 1)\delta\delta_E \varkappa_E}{10 kTN} \frac{\lambda}{\lambda^2 - \lambda_0^2},$$

$$\mathcal{C} = \frac{3(n_{\text{lim}}^2 - 1)\delta\delta_M \varkappa_M}{10 kTN} \frac{\lambda}{\lambda^2 - \lambda_0^2}$$

(où δ, δ_E et δ_M sont les anisotropies optique, électrique et magnétique). Ces expressions sont bien de la forme

$$\mathcal{B} = b \frac{\lambda}{\lambda^2 - \lambda_0^2}, \quad \mathcal{C} = c \frac{\lambda}{\lambda^2 - \lambda_0^2}$$

si l'anisotropie reste constante.

Remarquons d'ailleurs que cette hypothèse est la seule compatible avec l'hypothèse de Gans :

$$\frac{A_E}{A} = \frac{B_E}{B} = \frac{C_E}{C} = a$$

souvent utilisée dans les calculs sur l'effet Kerr, et qui laisse la quantité $\frac{(A-B)^2 + (B-C)^2 + (C-A)^2}{2(A+B+C)^2}$ invariable lorsque a varie avec la longueur d'onde.

Dans le cas des liquides, c'est en réalité le terme $\frac{(n^2+2)^2}{9n}\delta$ qui intervient. Mais nous avons dit comment on était amené à négliger, en première approximation, la variation relative du facteur $\frac{(n^2+2)^2}{9n}$ vis-à-vis de celle du terme en $\frac{\lambda}{\lambda^2 - \lambda_0^2}$.

Ainsi, *lorsqu'on suppose l'anisotropie optique constante, la théorie de l'orientation conduit à ma formule et non à celle de Havelock.*

Les travaux récents de Turner, Mitra et Krishnan [38] montrent justement que dans un large intervalle spectral et pour les substances non associées, il n'y a aucune dispersion sensible du facteur de dépolarisation, donc de l'anisotropie optique. C'est là sans doute la raison pour laquelle la formule que j'ai proposée traduit les résultats expérimentaux avec précision.

8. Généralisation de la formule. — L'interprétation théorique de ma formule en suggère une généralisation. Si en effet il intervient plusieurs longueurs d'onde propres au lieu d'une seule on est conduit à

$$\boxed{\mathcal{B} = \Sigma b \frac{\lambda}{\lambda^2 - \lambda_0^2}, \quad \mathcal{C} = \Sigma c \frac{\lambda}{\lambda^2 - \lambda_i^2}}. \tag{10}$$

Mais comme la précision des mesures ne dépasse guère 0,5 pour 100, il semble inutile à l'heure actuelle de faire appel à des formules à plusieurs termes lorsqu'on est loin des régions d'absorption.

Conclusion.

Comme on le voit, la formule de dispersion que j'ai proposée pour les effets Kerr et Cotton-Mouton permet de traduire avec précision et simplicité les résultats expérimentaux. D'autre part, elle a une interprétation graphique très commode. Ainsi, les résultats relatifs à un très large intervalle spectral

peuvent se condenser en une formule extrêmement simple ou en un « graphique rectiligne ».

De plus, à partir de la formule proposée, on peut, comme je l'ai montré, calculer les anisotropies optiques et magnétiques des molécules. Ce calcul s'effectue, non pas à partir de données numériques isolées, relatives à une seule longueur d'onde, mais à partir de *la dispersion même* de la biréfringence.

Ainsi, la formule proposée semble présenter à la fois un intérêt théorique et pratique.

Manuscrit reçu le 20 mars 1943.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. Servant, *C. R. Acad. Sc.*, 1937, **205**, p. 230; *Ann. de Physique*, 1939, **12**, p. 397.
[2] R. Servant, *C. R. Acad. Sc.*, 1940, **211**, p. 641.
[3] R. Servant, *C. R. Acad. Sc.*, 1941, **212**, p. 1140; *J. de Physique*, 1942, **3**, p. 90.
[4] J. Kerr, *Philosophical Magazine*, 1875, **50**, p. 337 et 446; 1879, **8**, p. 85 et 229; 1880, **9**, p. 157; 1882, **13**, p. 153 et 248. — P. Debye, *Handbuch der Radiologie*, Leipzig, 1925, **6**, p. 754. — G. Szivessy, *Handbuch der Physik*, Berlin, 1929, **21**, p. 724. — G. Bruhat et M. Pauthenier, *C. R. Congr. intern. Électr.*, Paris, 1932, **2**, p. 493. — J. W. Beams, *Reviews of Modern Physics*, 1932, **4**, p. 135. — H. A. Stuart, *Molekulstruktur*, Berlin, 1934, p. 197.
[5] A. Cotton et H. Mouton, *C. R. Acad. Sc.*, 1907, **145**, p. 229; *Ann. de Chimie et de Physique*, 1910, **19**, p. 153; 1910, **20**, p. 194; *J. de Physique*, 1911, **1**, p. 5. — P. Debye, *Handbuch der Radiologie*, Leipzig, 1925, **6**, p. 754. — G. Szivessy, *Handbuch der Physik*, Berlin, 1929, **21**, p. 808. — G. Bruhat et M. Pauthenier, *C. R. Congr. intern. d'Électricité*, Paris, 1932, **2**, p. 529. — J. W. Beams, *Reviews of Modern Physics*, 1932, **4**, p. 160. — W. Schütz, *Handbuch der Experimental Physik*, Leipzig, 1936, **16**, p. 210. — J. Rabinovitch, *C. R. Congr. magn. de Strasbourg*, 1939, **1**, p. 1.
[6] T. H. Havelock, *Proceedings of the Royal Society of London*, 1907, A **80**, p. 28; 1911, A **84**, p. 492; 1929, A **74**, p. 46.
[7] R. Servant, *C. R. Acad. Sc.*, 1940, **211**, p. 780.
[8] Gilford G. Quarles, *Physical Review*, 1934, **46**, p. 692.
[9] G. Szivessy et A. Dierkesmann, *Annalen der Physik*, 1929, **3**, p. 507.
[10] R. Guillien, *Ann. de Physique*, 1937, **8**, p. 555.
[11] L. R. Ingersoll et Wesley R. Winch, *Physical Review*, 1933, **44**, p. 399.
[12] H. Bizette et B. Tsaï, *C. R. Acad. Sc.*, 1935, **201**, p. 955.
[13] Ch. Haenny, *C. R. Acad. Sc.*, 1931, **193**, p. 931.
[14] P. Lainé, *C. R. Acad. Sc.*, 1933, **196**, p. 1218; *Actualités scientifiques et industrielles*, Paris, 1936, n° **324**.
[15] C. Salceanu, *C. R. Acad. Sc.*, 1932, **194**, p. 863.
[16] A. Cotton et H. Mouton, *C. R. Acad. Sc.*, 1908, **147**, p. 193.
[17] Francis J. Davis, *J. Opt. Soc. Amer.*, 1940, **30**, p. 488.
[18] R. Servant, *C. R. Acad. Sc.*, 1942, **214**, p. 159; 1942, **215**, p. 574; 1943, **216**, p. 177.
[19] P. Langevin, *C. R. Acad. Sc.*, 1910, **151**, p. 475; *Le Radium*, 1910, **7**, p. 249.
[20] M. Born, *Ann. der Physik*, 1918, **55**, p. 177.
[21] R. de Mallemann, *Ann. de Physique*, 1924, **2**, p. 187.
[22] R. Gans, *Ann. der Physik*, 1921, **65**, p. 97; *Handbuch der Experimental Physik*, Leipzig, 1928, **19**, p. 397.
[23] C. V. Raman et K. S. Krishnan, *Philosophical Magazine*, 1927, **3**, p. 713 et 724; *Proceedings of the Royal Society of London*, 1927, A **113**, p. 511; 1927, A **117**, p. 1; *C. R. Acad. Sc.*, 1927, **184**, p. 449.
[24] H. A. Stuart, *Zeitsch. für Physik*, 1929, **55**, p. 358; 1929, **59**, p. 13; 1930, **63**, p. 533. — H. A. Stuart et H. Volkmann, *Zeitsch. für Physik*, 1923, **83**, p. 444 et 461. — H. A. Stuart et W. Buchheim, *Zeitsch. für Physik*, 1938, **111**, p. 36.
[25] R. de L. Kronig, *Band Spectra and Molecules*, Cambridge, 1930.
[26] M. Born et P. Jordan, *Elementare quantenmechanik*, Berlin, 1930, p. 259.
[27] J. H. Van Vleck, *The theory of electric and magnetic susceptibilities*, Oxford, 1932.
[28] R. Serber, *Physical Review*, 1933, **43**, p. 1003 et 1011.
[29] Th. Neugebauer, *Zeitsch. für Physik*, 1939, **112**, p. 257; 1939, **113**, p. 115; 1940, **116**, p. 428; 1942, **119**, p. 114.
[30] J. Cabannes, *La diffusion moléculaire de la lumière*, Paris, 1929. — E. Darmois, *L'état liquide de la matière*, Paris, 1943.
[31] Y. Rocard, *C. R. Acad. Sc.*, 1925, **181**, p. 212; *Ann. de Physique*, 1928, **10**, p. 203; *Philosophical Magazine*, 1928, **6**, p. 204.
[32] E. U. Condon, *Reviews of Modern Physics*, 1937, **9**, p. 439.
[33] R. de Mallemann, *Ann. de Physique*, 1924, **2**, p. 162.
[34] E. Darmois, *Traité de Chimie organique de Grignard*, Paris, 1936, **2**, p. 14.
[35] S. Ramachandra Rao, *Indian Journal of Physics*, 1927, **2**, p. 7.
[36] K. R. Ramanathan, *Proceedings of the Royal Society*, 1926, A **110**, p. 123.
[37] S. W. Chinchalkar, *Indian Journ. of Physics*, 1932, **6**, p. 563.
[38] S. M. Mitra, *Zeitsch. für Physik*, 1935, **96**, p. 29. — R. S. Krishnan, *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, 1936, A **3**, p. 566.

GROUPEMENT ET DÉGROUPEMENT AU SEIN D'UN FAISCEAU CATHODIQUE INJECTÉ DANS UN ESPACE EXEMPT DE CHAMPS EXTÉRIEURS, APRÈS AVOIR ÉTÉ MODULÉ DANS SA VITESSE. II.

Par R. WARNECKE, J. BERNIER et P. GUÉNARD.

DEUXIÈME PARTIE.

Groupement dans un faisceau électronique commandé par une modulation de vitesse sinusoïdale, quand on tient compte des effets de charge d'espace.

L'insuffisance de la théorie du rassemblement « purement cinématique » dans un faisceau électronique modulé par contrôle de vitesse semble, *a priori*, évidente pour l'application à de nombreux cas pratiques : aux effets de la charge d'espace en l'absence de signal alternatif, s'ajoutent en effet les actions répulsives des diverses portions de faisceau de densité différente. Intuitivement déjà, on conçoit qu'il ne doit pas être possible en réalité, comme le prétend la théorie du rassemblement cinématique, de moduler complètement l'intensité du courant de conduction d'un faisceau de vitesse moyenne suffisamment faible, avec un tout petit signal et une très faible longueur d'espace de rassemblement.

Deux méthodes ont été indiquées pour tenir compte des effets de charge d'espace dans les faisceaux modulés dans leur vitesse. La première proposée par Hahn [10] [11], et reprise par Ramo [12] [13], abandonnant la base du mouvement individuel des électrons, ramène le problème à celui de la propagation d' « ondes de charge d'espace » qui, excitées par le signal, se propagent le long du faisceau en subissant des modifications dont on utilise les effets (par influence dans le circuit de sortie). Dans cette théorie on cherche à déterminer les types d'ondes qui peuvent se propager le long d'un faisceau d'électrons glissant à l'intérieur d'un tuyau métallique et à établir comment ces ondes, excitées par une différence de potentiel périodique, peuvent provoquer au cours de leur propagation une modulation de courant de conduction.

Ainsi présenté le problème a alors quelque analogie avec celui de la propagation d'ondes électromagnétiques le long des conducteurs d'une ligne de transmission coaxiale (les propriétés particulières d'un milieu de propagation rempli de charges mobiles étant essentiellement introduites). Ce problème peut être mis convenablement en équations, même dans le cas général, à partir des équations de Lorentz, mais malheureusement, dès que l'on aborde la résolution, les complications mathématiques sont telles que des restrictions importantes doivent être introduites (hypothèse du petit signal par exemple) ce qui réduit considérablement la portée des résultats.

La seconde méthode proposée pour tenir compte des effets de la charge d'espace consiste à évaluer la force électrique résultante exercée sur un électron en un point quelconque du faisceau par les groupes d'électrons distribués le long de l'espace de groupement, et à introduire l'expression de cette force dans l'équation du mouvement de l'électron. Cette méthode a déjà été suivie par Webster [4], mais les hypothèses de cet auteur ne sont pas légitimées par les conditions expérimentales habituelles, ce qui ôte également aux résultats une grande partie de leur valeur. C'est un procédé du même genre qui est utilisé ici, mais avec des hypothèses différentes qui, bien que restrictives, correspondent néanmoins à un certain nombre de cas pratiques importants.

Le problème étudié correspond au schéma de la figure 1 dans lequel un faisceau rectiligne infiniment long est modulé en vitesse au niveau de MM' puis subit un groupement par glissement. Tant qu'elles ne sont pas explicitement modifiées, les hypothèses de la première partie sont conservées dans cette étude mais, par souci de simplicité, on se limite à l'utilisation d'une modulation de vitesse sinusoïdale.

2. A. — **Équation du mouvement de l'électron.** — La résultante des forces exercées par l'ensemble des électrons du faisceau sur un électron particulier lui communique une accélération $\tilde{\gamma}$ qui, dépendant de son abscisse (et donc du temps de transit T), modifie son mouvement, lequel cesse d'être uniforme comme dans le rassemblement cinématique; avec $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}\,(T,\, t_0)$, on a donc

$$v = v_1 + \tilde{v} = v_1 + \int_0^T \tilde{\gamma}\, \mathrm{d}T, \qquad z = v_1 T + \int_0^T \tilde{v}\, \mathrm{d}T.$$

Avec

$$\lambda = \frac{\omega z}{v_0}, \qquad v_1 = v_0(1 + \delta \sin\varphi), \qquad \omega T = \tau,$$

on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} \frac{\tilde{v}}{v_0} &= \frac{1}{\omega v_0}\int_0^\tau \tilde{\gamma}\, d\tau, \\ \lambda &= (1+\delta \sin\varphi)\tau + \int_0^\tau \frac{\tilde{v}}{v_0}\, d\tau, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Introduisons l'angle de transit $\tau_1 = \lambda(1 - \delta \sin\varphi)$ du rassemblement cinématique, ce qui suppose $\delta^2\lambda$ négligeable devant $\delta\lambda$ (donc δ^2 négligeable devant δ), il s'ensuit que

$$\tau = \tau_1 - \tilde{\tau} \quad \text{avec } \tilde{\tau} = \int_0^\tau \frac{\tilde{v}}{v_0}\, d\tau. \qquad (15)$$

2. B. — **Avec quelle précision doit-on chercher à évaluer** $\tilde{\tau}$? — La forme de l'équation (15) fait entrevoir la possibilité d'obtenir l'expression de i quand on tient compte des effets de dégroupement, à partir d'une correction à apporter aux résultats de la théorie du rassemblement cinématique.

Le terme correctif $\tilde{\tau}$ du temps de transit doit évidemment être calculé avec la même approximation que son terme principal, et ceci permet pour certaines conditions restrictives d'obtenir une expression analytique simple pour $\frac{i}{i_0}$.

En effet, puisque cela est fait pour le calcul de τ_1, on doit négliger pour le calcul de $\tilde{\tau}$ les termes du même ordre de grandeur que $\delta^2\lambda$. Mais, d'après (15),

$$\tilde{\tau} < \tau \left|\frac{\tilde{v}}{v_0}\right|_{max} \sim \lambda \left|\frac{\tilde{v}}{v_0}\right|_{max},$$

on doit donc négliger dans $\frac{\tilde{v}}{v_0}$ les termes de l'ordre de grandeur de δ^2 au plus. Inversement :

Si $\frac{\tilde{v}}{v_0} \approx \delta^2$, les effets de dégroupement longitudinal sont négligeables pour le calcul du temps de transit.

Si $\frac{\tilde{v}}{v_0} \geq \delta$, la modification de τ due aux amas de charges est prépondérante vis-à-vis de celle qui résulte des variations de vitesse produites extérieurement à l'entrée du système; dans ce cas τ doit être calculé à l'aide de *plusieurs* approximations successives.

Si $\delta^2 < \frac{\tilde{v}}{v_0} < \delta$, les effets de dégroupement longitudinal n'apportent qu'une correction au rassemblement cinématique.

Dans le dernier de ces trois cas, le fait de négliger $\delta^2\lambda$ conduit pour $\tilde{\tau}$ à l'expression simplifiée $\tilde{\tau} = \int_0^\lambda \frac{\tilde{v}}{v_0}\, d\tau$ dans laquelle les quantités $\frac{\tilde{v}}{v_0} = \frac{1}{\omega v_0}\int_0^\tau \tilde{\gamma}\, d\tau$ et $\tilde{\gamma}(\tau, \varphi)$ peuvent être calculées à l'aide des relations (5) et (6) relatives au rassemblement cinématique tout en négligeant les termes du deuxième ordre vis-à-vis de δ considéré comme infiniment petit principal.

2. C. — **Calcul de l'accélération.** — *a.* HYPOTHÈSES. — Les forces qui agissent sur le mouvement des électrons du faisceau dans l'électrode étui de la figure 1 sont : d'une part celles qui proviennent des électrons du faisceau, d'autre part celles qui sont dues aux courants et aux charges superficielles des parois entourant le faisceau. Dans ce qui suit on suppose que les parois sont suffisamment éloignées du domaine où l'on étudie le mouvement de l'électron pour que les forces résultantes puissent être négligées. Le problème traité sera donc celui de la détermination en P de l'intensité du courant de conduction dans un faisceau rectiligne infiniment long, isolé dans l'espace, de densité constante en amont du point M où il subit une modulation de vitesse sinusoïdale de faible profondeur, et maintenu cylindrique par une focalisation magnétique intense.

Cette dernière hypothèse a une double nécessité : théorique et technique. En effet, à moins de supposer un faisceau infiniment large, ce qui n'a aucune réalité physique, elle permet d'admettre implicitement que les trajectoires des électrons sont rectilignes et parallèles et de se rapprocher ainsi des hypothèses du rassemblement cinématique. Si le champ magnétique n'existait pas, ou n'avait pas une intensité suffisante, l'onde de charge d'espace accentuerait les effets de dispersion dus à des vitesses radiales des électrons et qui existent déjà au sein d'un faisceau de section finie, même en l'absence de signaux alternatifs. Ces vitesses radiales pourraient avoir des effets considérables et notamment pourraient masquer complètement les effets normaux de la modulation de vitesse que l'on cherche à produire et à discuter.

En fait, à cause des effets de haute fréquence dans le modulateur et dans le collecteur, l'introduction d'un champ magnétique focalisateur est également une nécessité technique dont il est difficile de s'affranchir complètement dans les tubes à modulation de vitesse puissants et ceci quel que soit le système de focalisation électrique que comportent ces tubes.

Pour simplifier les développements mathématiques, on restreindra ici l'analyse au cas où le faisceau a un faible diamètre car, dans le cadre des hypothèses restrictives déjà admises, cette nouvelle hypothèse permet de considérer que la densité électronique est la même en tous les points d'une même section droite du faisceau.

En effet, comme il est montré dans l'Annexe II par des considérations élémentaires concernant un faisceau non modulé, le rapport entre le potentiel U_r à une distance r de l'axe et le potentiel U_m sur l'axe est approximativement

$$\frac{U_r}{U_m} \sim 1 + \frac{R^2}{4}$$

avec $R^2 = 1{,}9 \times 10^5\, I_0\, U_0^{-\frac{3}{2}}\; r^2$ (unités pratiques,

I_0 intensité de courant), ou encore

$$R^2 = K\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)^2$$

avec

$$K = 8\pi\frac{e}{m}\,\frac{\rho_0}{\omega^2}.$$

On obtient alors

$$\frac{\delta_r}{\delta_m} = \frac{U_m}{U_r} \sim 1 - \frac{R^2}{4}, \qquad \frac{\lambda_r}{\lambda_m} = \left(\frac{U_m}{U_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sim 1 - \frac{R^2}{8},$$

$$\frac{(\delta\lambda)_r}{(\delta\lambda)_m} \sim 1 - \frac{3R^2}{8}.$$

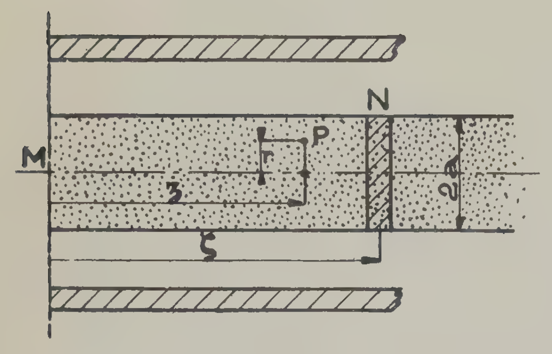


Fig. 4.

En prenant les moyennes dans une section droite ceci donne

$$\left(\overline{\frac{\lambda_r}{\lambda_m}}\right) = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a 2\pi r\left(1 - \frac{R^2}{8}\right)\mathrm{d}r = 1 - \frac{1}{16}K\left(\frac{\omega a}{v_0}\right)^2$$

$$\left(\overline{\frac{\delta\lambda_r}{\delta\lambda_m}}\right) = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a 2\pi r\left(1 - \frac{3R^2}{8}\right)\mathrm{d}r = 1 - \frac{3}{16}K\left(\frac{\omega a}{v_0}\right)^2.$$

Ainsi dès que

$$\frac{3}{16}K\left(\frac{\omega a}{v_0}\right)^2 \approx \delta^2 \qquad \text{ou} \qquad a \leqq \frac{\delta}{2}U_0^{\frac{3}{4}} I_0^{-\frac{1}{2}}\omega^{-2} \quad (^1) \qquad (16)$$

on pourra négliger les variations radiales de la phase λ et du degré de rassemblement $\delta\lambda$, c'est-à-dire considérer la densité du faisceau comme uniforme dans une même section droite (²) : c'est ce qui est fait dans la suite.

b. Expression de $\tilde{\gamma}$. — Soient :

$2a$, le diamètre du faisceau;

z, l'abscisse de la section droite où se trouve l'électron considéré P par rapport à la section M, où est produite la modulation de vitesse;

ζ, l'abscisse d'une section quelconque N de densité électronique moyenne $\rho(\zeta)$.

(¹) Unités pratiques G. G. S.

(²) Par exemple, pour $U_0 = 5\,000$ V, $I_0 = 0{,}$[illegible] A/cm², cette approximation est valable dès que le diamètre du faisceau en centimètres vaut $13\,\delta$.

D'après les hypothèses précédentes, la tranche N d'épaisseur $\mathrm{d}\zeta$ exerce sur l'électron P une force de répulsion dont la composante suivant l'axe est égale en valeur absolue à $2\pi e\rho(\zeta)\,\Omega(z, \zeta, r)\,\mathrm{d}\zeta$ où Ω est une fonction d'action ne dépendant que de la distance de P à N, du diamètre du faisceau, et de la distance de P à l'axe, donc de $|\zeta - z|$, a et r.

En prenant pour direction positive celle du mouvement des électrons, la force élémentaire exercée par la tranche N sur l'électron P est égale à

$$-2\pi e\rho(\zeta)\Omega\,\mathrm{d}\zeta \qquad \text{si } \zeta > z,$$

$$+2\pi e\rho(\zeta)\Omega\,\mathrm{d}\zeta \qquad \text{si } \zeta < z \text{ avec } \rho(\zeta) \equiv \rho_0 \text{ lorsque } \zeta \leqq 0.$$

Par suite, l'accélération de l'électron P est

$$\tilde{\gamma}(z, r) = 2\pi\frac{e}{m}\left[\rho_0\int_{-\infty}^{0}\Omega\,\mathrm{d}\zeta + \int_0^z \rho(\zeta)\Omega\,\mathrm{d}\zeta - \int_z^{\infty}\rho(\zeta)\Omega\,\mathrm{d}\zeta\right]. \qquad (17)$$

Puisqu'on considère le faisceau comme étant transversalement homogène, il n'interviendra dans les calculs que la valeur moyenne de $\tilde{\gamma}$ dans une section droite, soit

$$\tilde{\gamma}(z) = \frac{1}{a^2}\int_0^a \tilde{\gamma}(z, r)\,2r\,\mathrm{d}r$$

et, par suite, également la valeur moyenne de Ω, soit

$$\overline{\Omega}(z, \zeta) = \frac{1}{a^2}\int_0^a \Omega(z, \zeta, r)\,2r\,\mathrm{d}r.$$

Comme $\overline{\Omega}(z, \zeta)$ n'est fonction que du groupement $|\zeta - z|$, on a

$$\int_{-\infty}^{z}\overline{\Omega}(z, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_z^{+\infty}\overline{\Omega}(z, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

D'autre part, mettant en évidence la partie périodique de la densité $\rho(\zeta)$, on a

$$\frac{\rho(\zeta)}{\rho_0} = 1 + f(\zeta) \qquad \text{avec} \qquad f(\zeta) \equiv 0 \text{ pour } \zeta < 0.$$

Il s'ensuit que l'accélération moyenne d'un électron dans la tranche P a pour expression

$$\tilde{\gamma}(z) = 2\pi\frac{e}{m}\rho_0\left[\int_0^z f(\zeta)\overline{\Omega}(z, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_z^{+\infty} f(\zeta)\overline{\Omega}(z, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right]. \qquad (18)$$

Puisque dans $\tilde{\gamma}(z)$ intervient non pas $\rho(\zeta)$ mais seulement $f(\zeta)$, cela signifie qu'avec les hypothèses faites, seules interviennent, pour le dégroupement, les différences entre les valeurs locales de la densité et sa valeur moyenne. Ce résultat simple admis par Webster [4] sans justification ni restriction n'est valable que lorsque la variation radiale de potentiel peut être négligée, c'est-à-dire lorsque le

faisceau a un diamètre fini et sous réserve de la condition (16).

c. Expression simplifiée de la fonction d'action $\overline{\Omega}(z, \zeta)$. — La fonction d'action $\Omega(z, \zeta, r)$ est maximum sur l'axe du faisceau, c'est-à-dire pour $r = 0$. Par suite sa valeur moyenne dans une section droite est telle que

$$\Omega(z, \zeta) < \Omega(z, \zeta, 0).$$

Or, ainsi qu'il résulte d'un calcul classique,

$$\Omega(z, \zeta, 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{(z-\zeta)^2}}}.$$

D'autre part cette fonction est représentable à moins de 3 pour 100 près, ainsi qu'il apparaît sur la figure 5, par la fonction $e^{-p\frac{(z-\zeta)}{a}}$: dans cette expression, p est un coefficient numérique voisin de 1,18, mais supérieur à ce nombre. On trouvera à l'annexe III l'expression rigoureuse de $\overline{\Omega}(z, \zeta)$. Pour alléger les calculs on se contentera dans ce qui suit de l'expression simplifiée que l'on vient de donner et l'on remplacera

$$\overline{\Omega}(z, \zeta) \quad \text{par} \quad e^{-p\frac{|z-\zeta|}{a}},$$

sachant qu'on surestimera les effets de la charge d'espace en attribuant à p la valeur 1,18 [3].

d. Calcul de $\tilde{\gamma}$. — On remplace dans (18) $f(z)$ par sa valeur (6) donnée par la théorie du rassemblement cinématique, soit [4]

$$f(\zeta) = 2\mathcal{R}\left(\sum_{n=1}^{\infty} J_n(n\,\delta\xi)\, e^{jn(\omega t - \xi)}\right) \qquad \text{avec } \xi = \frac{\omega\zeta}{v_0}.$$

(On supprimera dorénavant le symbole $\mathcal{R}$, étant bien entendu que l'on ne prendra que la partie réelle du résultat final.) Posons

$$\frac{\omega a}{v_0} = \alpha,$$

d'où

$$\overline{\Omega} = e^{-p\frac{|\lambda-\xi|}{\alpha}},$$

et en remarquant que

$$J_n(n\,\delta\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{jn(\delta\xi\sin\varphi - \varphi)}\, d\varphi,$$

l'élément différentiel des intégrales figurant dans $\tilde{\gamma}$ s'écrit

$$\overline{\Omega}(z, \zeta) f(\zeta) = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{jn\omega t} \times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-p\frac{|\lambda-\xi|}{\alpha}}\, e^{-jn\xi}\, e^{jn(\delta\xi\sin\varphi - \varphi)}\, d\varphi.$$

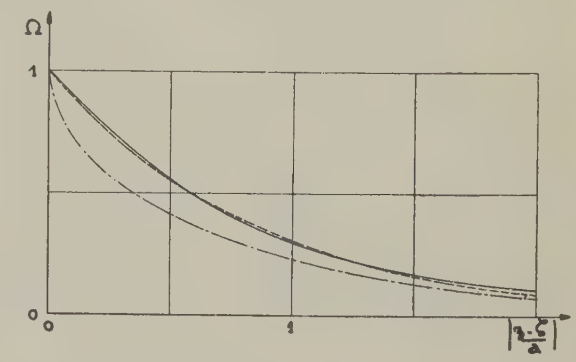


Fig. 5. — Courbes représentatives de la fonction d'action.

En traits pleins $\Omega(z, \zeta, 0) \equiv 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{(z-\zeta)^2}}}$.

En traits mixtes $\overline{\Omega}(z, \zeta)$.

En pointillés $e^{-1,18\frac{|z-\zeta|}{a}}$.

Pour calculer $\int_0^z f(\zeta)\overline{\Omega}\, d\zeta$ et $\int_z^{\infty} f(\zeta)\overline{\Omega}\, d\zeta$, on permute l'ordre d'intégration d'où, en remplaçant ζ par $\frac{v_0}{\omega}\xi$

$$\int_0^z f(\zeta)\overline{\Omega}\, d\zeta = \frac{2v_0}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty} e^{jn\omega t}\, e^{-\frac{p\lambda}{\alpha}} \times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-jn\varphi}\, d\varphi \int_0^{\lambda} e^{jn(\delta\sin\varphi - 1)\xi + \frac{p\xi}{\alpha}}\, d\xi,$$

$$\int_z^{\infty} f(\zeta)\overline{\Omega}\, d\zeta = \frac{2v_0}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty} e^{jn\omega t}\, e^{p\frac{\lambda}{\alpha}} \times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-jn\varphi}\, d\varphi \int_{\lambda}^{\infty} e^{jn(\delta\sin\varphi - 1)\xi - \frac{p\xi}{\alpha}}\, d\xi,$$

En portant dans (18) on obtient alors

$$\tilde{\gamma}(z) = 4\pi\frac{e}{m}\rho_0\frac{v_0}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty} e^{jn\omega t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2jn(1-\delta\sin\varphi)}{\frac{p^2}{\alpha^2} + n^2(1-\delta\sin\varphi)^2}\, e^{jn(\delta\lambda\sin\varphi - \lambda - \varphi)}\, d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-\frac{p\lambda}{\alpha} - jn\varphi}}{\frac{p}{\alpha} - jn(1-\delta\sin\varphi)}\, d\varphi\right].$$

[3] Notons que pour

$$|\zeta - z| \geq 2a, \qquad 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{(z-\zeta)^2}}} \sim \frac{1}{2}\frac{a^2}{(\zeta - z)^2},$$

ce qui fait qu'à partir d'une distance P égale au diamètre du faisceau, tout se passe comme si la charge totale d'une section droite était localisée sur l'axe. D'autre part, lorsque a augmente indéfiniment, Ω tend vers 1.

[4] Pour tenir compte de la variation radiale du potentiel, il faudrait remplacer λ par λ_r et δ par δ_r puis, dans le résultat final, faire la moyenne dans une section droite.

On peut dans l'élément différentiel négliger $\delta \sin \varphi$ devant l'unité, et on obtient ainsi la valeur suivante de l'accélération de l'électron P due aux effets de la charge d'espace

$$\tilde{\gamma}(z) = K j \omega v_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} J_n(n\,\delta\lambda)\, e^{jn(\omega t - \lambda)} \qquad (19)$$

avec

$$K = 8\pi \frac{e}{m} \frac{\rho_0}{\omega^2}, \qquad \lambda = \frac{\omega z}{v_0}, \qquad \alpha = \frac{\omega a}{v_0}.$$

e. Calcul de $\frac{\tilde{v}}{v_0}$. — Exprimons dans (19) ωt et λ en fonction de τ; d'après (4) $\lambda = \tau(1 + \delta \sin\varphi)$ et $\tau = \omega t - \varphi$, donc $\omega t - \lambda = \varphi - \delta\tau \sin \varphi$.

Puisque l'on néglige δ^2, on a $\delta\lambda = \delta\tau$. Cette valeur portée dans (14) donne

$$\frac{\tilde{v}}{v_0} = K j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} I_n(\tau) \qquad (20)$$

avec

$$I_n(\tau) = \int_0^{\tau} J_n(n\,\delta u)\, e^{jn(\varphi - \delta u \sin\varphi)}\, du. \qquad (21)$$

2. D. — **Calcul de l'angle de transit.** — Précédemment on a supposé qu'on se trouvait dans des conditions physiques telles que

$$\tau = \tau_1 - \tilde{\tau} \qquad \text{avec } \tau_1 = \lambda - \delta\lambda \sin\varphi, \qquad \tilde{\tau} = \int_0^{\lambda} \frac{\tilde{v}}{v_0}\, d\tau.$$

Ainsi, en faisant dans (20) et dans (21) les changements de variables $\delta u = x$, $\delta\tau = y$, on obtient

$$\tilde{\tau} = j \frac{K}{\delta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} \int_0^{\delta\lambda} dy \int_0^{y} J_n(nx)\, e^{jn(\varphi - x \sin\varphi)}\, dx,$$

soit, en ne considérant que la partie réelle de l'expression ci-dessus

$$\tilde{\tau} = \frac{K}{\delta^2} \int_0^{\delta\lambda} dy \int_0^{y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} J_n(nx) \sin(nx \sin\varphi - n\varphi)\, dx.$$

Développement en série de Fourier de $\tilde{\tau}$. — Ce développement, nécessaire pour obtenir $\frac{i}{i_0}$ d'après le paragraphe 0. B., ne contient que des termes en $\sin mx$, on posera donc

$$\tilde{\tau} = -\frac{K}{\delta^2}[a_1 \sin\varphi + a_2 \sin 2\varphi + \ldots + a_m \sin m\varphi + \ldots]$$

avec

$$-\frac{K}{\delta^2} a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\tau} \sin m\varphi\, d\varphi,$$

et l'on a [5]

$$a_m = \int_0^{\delta\lambda} dy \int_0^{y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} \times J_n(nx)[J_{n-m}(nx) - J_{n+m}(nx)]\, dx.$$

En particulier

$$a_1 = \int_0^{\delta\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(ny)}{n^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}}\, dy \qquad (a_1 > 0),$$

$$a_2 = -2\left[\int_0^{\delta\lambda} dy \int_0^{y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} \frac{J_n^2(nx)}{x^2}\, dx - \int_0^{\delta\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} \frac{J_n^2(ny)}{y}\, dy\right]$$

$(a_2 < 0)$.

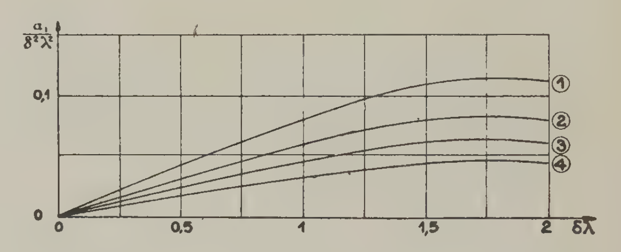


Fig. 6. — Courbes représentatives des variations de $\frac{a_1}{\delta^2\lambda^2}$ en fonction de $r = \delta\lambda$.

La courbe (1) correspond à $\frac{p^2}{\alpha^2} = 0$.

La courbe (2) correspond à $\frac{p^2}{\alpha^2} = 0,5$.

La courbe (3) correspond à $\frac{p^2}{\alpha^2} = 1$.

La courbe (4) correspond à $\frac{p^2}{\alpha^2} = 2$.

Les a_m ne dépendent que du degré de rassemblement $r = \delta\lambda$ et du diamètre du faisceau $\left(\text{par } \alpha = \frac{\omega a}{v_0}\right)$; ils tendent vers zéro avec α, c'est-à-dire avec a.

En figure 6 et 7 sont représentées les variations de $\frac{a_1}{(\delta\lambda)^2}$ et de $-a_2$ en fonction de $\delta\lambda$ pour différentes valeurs de $\frac{p^2}{\alpha^2}$; ces courbes montrent en particulier que pour $0 < \delta\lambda < 1,4$, on a

$$a_1 \sim \frac{1}{12} \frac{1}{1 + \frac{p^2}{\alpha^2}} (\delta\lambda)^3.$$

(5) On se sert de la relation suivante :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nx \sin\varphi - n\varphi) \sin m\varphi\, d\varphi = J_{n+m}(nx) - J_{n-m}(nx),$$

Elles montrent également que, pour $\frac{p^2}{\alpha^2} = 1$ par exemple, $-a_2$ reste compris entre 0 et 0,02 tant que $\delta\lambda$ reste inférieur à 1,6, tandis que lorsque $\delta\lambda > 1{,}8$, $a_2 \approx +0{,}7 - 0{,}4\,\delta\lambda$ et peut devenir important (ainsi pour $\delta\lambda = 3$, $a_2 \approx -0{,}5$).

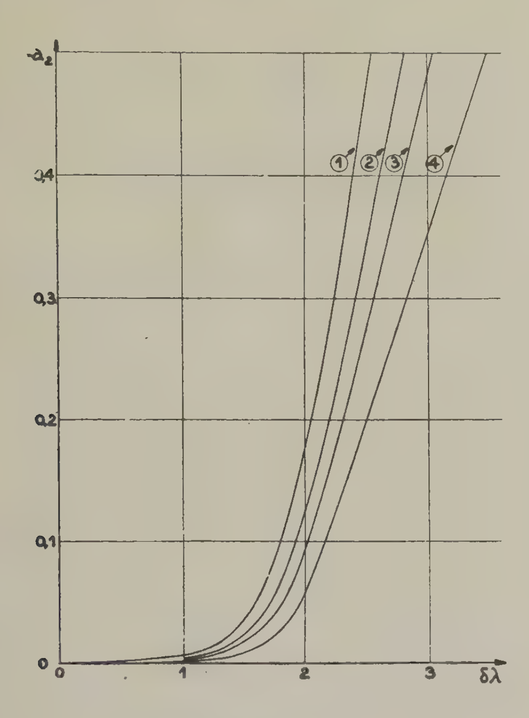


Fig. 7. — Courbes représentatives des variations de $-a_2$ en fonction de $r = \delta\lambda$.

La courbe (1) correspond à $\frac{p^2}{\alpha^2} = 0$.

La courbe (2) correspond à $\frac{p^2}{\alpha^2} = 0{,}5$.

La courbe (3) correspond à $\frac{p^2}{\alpha^2} = 1$.

La courbe (4) correspond à $\frac{p^2}{\alpha^2} = 2$.

2. E. — **Calcul de l'intensité du faisceau modulé.** — L'intensité du faisceau modulé est donnée par les équations (2) avec

$$\tau(\varphi) = \lambda - \delta\lambda \sin\varphi + \frac{K}{\delta^2}(a_1 \sin\varphi + a_2 \sin 2\varphi + \ldots).$$

Dans le développement, on doit négliger les termes qui sont de l'ordre de $\delta^2\lambda$.

a. Si $K\frac{|a_2|}{\delta^2}, \ldots, K\frac{|a_n|}{\delta^2}$ sont du même ordre de grandeur que $\delta^2\lambda$, on a

$$k_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-jn\left[\lambda + \varphi - \left(\delta\lambda - \frac{Ka_1}{\delta^2}\right)\sin\varphi\right]}\,d\varphi$$
$$= e^{jn\lambda} J_n\left[n\left(\delta\lambda - \frac{Ka_1}{\delta^2}\right)\right]$$

et

$$\frac{i_n}{i_0} = 2J_n\left(n\delta\lambda - \frac{Ka_1}{\delta^2}\right)\cos n(\omega t - \lambda), \quad (22)$$

ce qui donne en particulier pour le premier harmonique de l'onde de courant

$$\frac{i_1}{i_0} = 2J_1\left(\delta\lambda - \frac{Ka_1}{\delta^2}\right)\cos(\omega t - \lambda). \quad (23)$$

Ainsi, dans le cadre des hypothèses faites, si $\frac{K|a_2|}{\delta^2} \lesssim \delta^2\lambda$, la charge d'espace n'entraîne, par rapport au rassemblement cinématique, ni déphasage, ni diminution de la grandeur maximum possible de l'onde fondamentale (qui reste égale à $2 \times 0{,}582\, i_0$). Elle entraîne seulement, pour un espace de rassemblement donné, une diminution de degré de rassemblement, qui passe de la valeur $\delta\lambda$ à la valeur $\delta\lambda - \frac{Ka_1}{\delta^2}$.

Si l'on suppose en outre que $\delta\lambda$ est petit (groupement faible) de façon que l'on puisse écrire

$$J_1(\delta\lambda) = \frac{\delta\lambda}{2}$$

et

$$J_n(n\,\delta\lambda) = 0 \qquad \text{pour } n > 1,$$

on obtient (⁶)

$$\frac{i}{i_0} = 1 - \delta\left[\lambda - \frac{K\lambda^3}{12\left(1 + \frac{p^2}{\alpha^2}\right)}\right]\cos(\omega t - \lambda);$$

b. Si $\frac{Ka_2}{\delta^2}, \ldots, \frac{Ka_n}{\delta^2}$ sont petits mais non négligeables, mais si $\left(\frac{Ka_2}{\delta^2}\right)^2 \lesssim 2\,\delta^2\lambda$, on obtient

$$e^{-jn[\varphi + \tau(\varphi)]} = e^{-jn\left[\lambda + \varphi - \left(\delta\lambda - \frac{Ka_1}{\delta^2}\right)\sin\varphi\right]}\, e^{-jn\frac{K}{\delta^2}(a_2 \sin 2\varphi + \ldots)}$$
$$\approx e^{-jn\left[\lambda + \varphi - \left(\delta\lambda - \frac{Ka_1}{\delta^2}\right)\sin\varphi\right]}$$
$$\times \left[1 - jn\frac{K}{\delta^2}(a_2 \sin 2\varphi + a_3 \sin 3\varphi + \ldots)\right],$$

d'où

$$\frac{k_n}{2} = e^{-jn\lambda}\left\{2J_1\left(\delta\lambda - \frac{Ka_1}{\delta^2}\right) + \frac{K}{\delta^2}\sum_{p=2}^{\infty} a_p\right.$$
$$\times \left[J_{p+n}\left(n\,\delta\lambda - n\frac{Ka_1}{\delta^2}\right)\right.$$
$$\left.\left. + (-1)^{p-n+1} J_{p-n}\left(n\,\delta\lambda - n\frac{Ka_1}{\delta^2}\right)\right]\right\},$$

(⁶) Cette hypothèse est identique à celle de Hahn [10] qui suppose, dans sa théorie, que $f(z)$ est petit. Le résultat ci-dessus constitue une première approximation qui correspond aux premiers termes du développement en série de ce que Hahn écrit $\sin\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}z$, son coefficient a étant proportionnel à $\sqrt{p^2 + \alpha^2}$.

On obtiendrait les termes suivants du développement en poursuivant la méthode d'approximations successives.

ce qui conduit en particulier pour l'onde du courant fondamentale à

$$\frac{i_1}{i_0} = \left\{ 2 J_1(u) + \frac{K}{\delta^2} \sum_{p=2}^{\infty} a_p [J_{p+1}(u) + (-1)^p J_{p-1}(u)] \right\} \cos(\omega t - \lambda)$$

$$\text{avec} \quad u = \delta\lambda - \frac{K a_1}{\delta^2}. \tag{24}$$

Ici encore la charge d'espace n'entraîne pas de déphasage dans l'onde de courant mais, par le fait que a_2 est négatif le maximum d'amplitude de celle-ci reste inférieur à celui du rassemblement cinématique. Un déphasage ne commencerait à apparaître que si $\frac{1}{2}\left(\frac{K a_2}{\delta^2}\right)^2$ n'était pas négligeable; ce déphasage dépendrait alors de l'intensité moyenne i_0 par l'intermédiaire de K.

Exemple numérique :

Prenons

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{m}{e} v_0^2 = 4\,500 \text{ V}, \qquad \omega = \frac{2\pi c}{\Lambda} \qquad \text{avec } \Lambda = 22^{\text{cm}};$$

$$a = 0^{\text{cm}},47, \qquad i_0 = 0,2 \text{ amp/cm}^2, \qquad \delta = 0,12.$$

on a

$$\omega = 8,5.10^9, \qquad v_0 = 4.10^9 \text{ cm/sec},$$

$$\rho_0 = 0,15 \text{ U.E.S. C.G.S.}, \qquad \alpha = \frac{\omega a}{v_0} = 1,$$

$$K = 8\pi \frac{e}{m} \frac{\rho_0}{\omega} = 0,0277, \qquad \frac{K}{\delta^2} = 1,92.$$

La condition (16), $\frac{3}{16} K \alpha^2 < \delta^2$, est largement remplie, ce qui permet de négliger la variation radiale du potentiel.

On sait que le coefficient p provenant de la fonction d'influence Ω et entrant dans les coefficients a_i est supérieur à 1,18; en le prenant égal à 1, on majore considérablement les effets de la charge d'espace, avec cette valeur $\frac{\alpha^2}{p^2} = 1$, on a alors

$$|a_2| \sim -0,7 + 0,4\,\delta\lambda \qquad (\text{pour } \delta\lambda > 1,8).$$

On constate que $\frac{K |a_2|}{\delta^2} \lesssim \delta^2\lambda$ lorsque $\delta\lambda \lesssim 2$; donc avec les valeurs précédentes tant que le degré de rassemblement reste inférieur ou de l'ordre de grandeur de 2, les relations (22) et (23) restent applicables. Il faudrait, par contre, appliquer (24) pour $\delta\lambda$ compris entre 2 et 4.

Dans l'exemple numérique choisi, si l'on diminue la profondeur de modulation de vitesse δ, on ne peut plus négliger la variation radiale du potentiel dès que $\delta < 0,07$: pour $\delta = 0,07$ et pour $\delta\lambda < 1,5$, $K|a_2| \lesssim \delta^2\lambda$; dans ces conditions la formule (23) est applicable et, comme

$$a_1 \sim \frac{1}{12} \frac{1}{1 + \frac{p^2}{\alpha^2}} (\delta\lambda)^3 \qquad \text{pour } \delta\lambda < 1,4$$

on a, en particulier,

$$\frac{i_1}{i_0} = 2 J_1[\delta\lambda(1 - 0,035(\delta\lambda)^2)] \cos(\omega t - \lambda).$$

Par contre la formule (24) serait applicable lorsque $1,5 < \delta\lambda < 2$ et cesserait de l'être pour $\delta\lambda > 2$ (toujours en supposant $p = 1$).

Comparaison avec les résultats de Webster. — Webster suppose un faisceau infiniment large, ce qui correspond à $\frac{p}{\alpha} = 0$ et trouve pour $\delta\lambda \ll 1$,

$$\frac{i_1}{i_0} = \delta\lambda \frac{\sin hl}{hl} \cos(\omega t - \lambda) \qquad \text{avec } hl = \left[\frac{K\lambda^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $\delta\lambda \ll 1$ nos résultats donnent

$$\frac{i_1}{i_0} \to \left(\delta\lambda - \frac{K a_1}{\delta^2}\right) \cos(\omega t - \lambda)$$

et, comme

$$a_1 \sim \frac{1}{12} \frac{1}{1 + \frac{p^2}{\alpha^2}} (\delta\lambda)^3,$$

$$\frac{i_1}{i_0} \to \delta\lambda \left[1 - \frac{K}{\delta^2} \frac{1}{12} \frac{1}{1 + \frac{p^2}{\alpha^2}} (\delta\lambda)^2\right] \cos(\omega t - \lambda),$$

en faisant

$$\frac{p^2}{\alpha^2} = 0$$

on a

$$\frac{i_1}{i_0} \to \delta\lambda \left[1 - \frac{K\lambda^2}{12}\right] \cos(\omega t - \lambda),$$

relation identique à celle de Webster lorsque hl est suffisamment petit pour que

$$\frac{\sin hl}{hl} \sim 1 - \frac{(hl)^2}{6}.$$

Conclusions.

Rassemblement cinématique. — Lorsque l'on accepte les hypothèses d'un rassemblement purement cinématique, la théorie fait apparaître que, dans un faisceau électronique contrôlé par modulation de vitesse, il est possible de provoquer un groupement d'électrons tel que ce faisceau puisse céder à un champ électrique sinusoïdal de même périodicité, agissant parallèlement à son mouvement, la quasi totalité de son énergie cinétique. L'obtention de ce résultat implique un temps de transit dans l'espace

de glissement dont l'expression (en phases) est le développement en série de Fourier

$$\tau(\varphi) = \frac{\omega l}{v} = (2k-1)\pi + 2\left[\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \ldots + \frac{\sin n\varphi}{n} + \ldots\right].$$

Une telle durée du temps de transit peut être provoquée par le maintien d'une différence de potentiel alternative $U(\varphi)$ de période 2π et de valeur moyenne nulle (appliquée entre les grilles idéales d'un modulateur mince) telle que

$$\frac{U(\varphi)}{U_0} = a_0 + a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi + \ldots + a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi + \ldots$$

avec

$$a_0 = \frac{\lambda_l^2}{4\pi^2 k(k-1)} - 1 = 0,$$

$$a_n = \frac{2\lambda_l^2}{4\pi^2 k(k-1)} + \frac{n\lambda_l^2}{\pi}\left[si(2(k-1)n\pi) - si\,2k\pi n\right],$$

$$b_n = \frac{n\lambda_l^2}{\pi}\left[Ci(2(k-1)n\pi) - Ci\,2kn\pi\right].$$

La condition que $U(\varphi)$ ait une valeur moyenne nulle entraîne pour $\lambda_l = \frac{\omega l}{v_0}$ la valeur particulière $\lambda_l = \lambda_{l_0} = 2\pi\sqrt{k(k-1)}$ qui détermine une longueur optimum d'espace de glissement.

Déjà, avec une variation du temps de transit selon une forme correspondant à

$$\tau(\varphi) = (2k-1)\pi + 2\sin\varphi + \sin 2\varphi,$$

on peut obtenir, par un réglage convenable, un rendement de conversion maximum de l'ordre de 73,7 pour 100; ce rendement est supérieur de près de 16 pour 100 à la valeur bien connue 58,2 pour 100 qui est trouvée pour le réglage optimum dans le cas d'une modulation de vitesse sinusoïdale de faible amplitude.

Effets de la charge d'espace. — Une méthode générale du calcul de l'intensité du courant de conduction transporté par un faisceau d'électrons dont le temps de transit est périodiquement variable est indiquée. Cette méthode est appliquée à l'évaluation des principaux effets de la charge d'espace dans un faisceau rectiligne infiniment long parfaitement focalisé. Pour simplifier les calculs, l'analyse est restreinte au cas où le faisceau se déplace, loin de toute paroi, dans une électrode étui éliminant toute action électrique extérieure, après avoir subi une modulation de vitesse sinusoïdale. L'expression de l'intensité est trouvée en se limitant rigoureusement à l'approximation faite habituellement dans la théorie du rassemblement cinématique, où l'on néglige $\delta^2\lambda$ devant $\delta\lambda$.

Avec les hypothèses introduites, on constate que le rayon a du faisceau intervient par $\alpha = \frac{\omega a}{v_0}$ et la densité moyenne ρ_0 par $K = 8\pi\frac{e}{m}\frac{\rho_0}{\omega^2}$.

Les effets de la charge d'espace proviennent :

1° d'une variation radiale du potentiel, imputable à la valeur moyenne ρ_0 de la densité du faisceau et qui provoque en quelque sorte un manque de cohésion dans la formation des paquets sans qu'aucune force ne s'oppose au mouvement des électrons;

2° d'une variation longitudinale du potentiel, imputable aux excès et aux manques locaux de densité par rapport à la densité moyenne du faisceau et qui, par la force exercée sur les électrons, tend à empêcher la formation des paquets. Ce dernier effet est appelé « dégroupement longitudinal ».

En particulier pour l'onde de courant fondamentale les résultats suivants ont été obtenus :

1° Si

$$\frac{3}{16}\frac{K}{\delta^2}\alpha^2 \leq 1,$$

seul intervient le dégroupement longitudinal.

Dans ce cas :

a. Lorsque

$$\frac{K}{\delta^2}\frac{|a_2|}{r} \leq \delta, \qquad \text{où} \quad r = \delta\lambda,$$

on a

$$\frac{i_1}{i_0} = J_1(u)\cos(\omega t - \lambda) \qquad \text{avec} \quad u = r - \frac{K}{\delta^2}a_1.$$

Par rapport au rassemblement cinématique, il n'y a pas de changement de phase et l'amplitude de $\frac{i_1}{i_0}$ peut également atteindre la valeur maximum $2 \times 0,582$ (pour $u = 1,84$). Dans le cas particulier où $\delta\lambda$ est petit (cas des tubes amplificateurs de réception), on a

$$\frac{i_1}{i_0} = \delta\left[\lambda - \frac{K\lambda^3}{12\left(1 + \frac{p^2}{\alpha^2}\right)}\right]\cos(\omega t - \lambda).$$

b. Lorsque

$$\frac{1}{2}\left(\frac{K}{\delta^2}\frac{a_2}{r}\right)^2 r \leq \delta < \frac{K}{\delta^2}\frac{|a_2|}{r},$$

on a

$$\frac{i_1}{i_0} = \left\{2J_1(u) + \frac{K}{\delta^2}\sum_{p=2}^{\infty} a_p \times \left[J_{p+1}(u) + (-1)^p J_{p-1}(u)\right]\right\}\cos(\omega t - \lambda).$$

$$\text{avec} \quad u = r - \frac{K}{\delta^2}a_1.$$

Dans ce cas, il n'y a pas de changement de phase,

mais comme $a_2 < 0$, l'amplitude maximum de $\frac{i_1}{i_0}$ est toujours inférieure à $2 \times 0{,}582$.

c. Pour $\left(\frac{K}{\delta^2}\frac{a_2}{r}\right)^2 r > 2\delta$, les résultats n'ont pas été explicités mais on peut voir qu'il apparaît un déphasage qui dépend de K, donc de i_0.

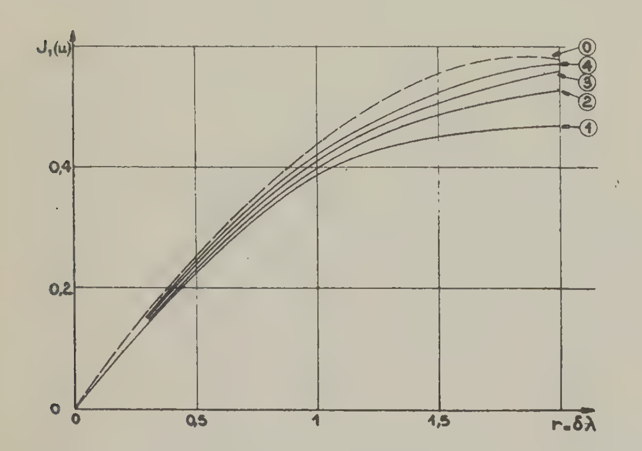


Fig. 8. — Courbes représentatives des variations de $J_1(u)$ avec $u = r - \frac{K}{\delta^2} a_1$ pour $\frac{K}{\delta^2} = 1{,}92$.

La courbe (0) correspond à $a_1 = 0$.

La courbe (1) correspond à $\frac{p^2}{\alpha^2} = 0$.

La courbe (2) correspond à $\frac{p^2}{\alpha^2} = 0{,}5$.

La courbe (3) correspond à $\frac{p^2}{\alpha^2} = 1$.

La courbe (4) correspond à $\frac{p^2}{\alpha^2} = 2$.

2° Si

$$\frac{3}{16}\frac{K}{\delta^2}\alpha^2 > 1 :$$

a. Lorsque

$$\frac{K}{\delta^2}\frac{a_1}{r} \leq \delta,$$

le dégroupement longitudinal n'intervient pas, il ne subsiste que l'effet dû à la variation radiale du potentiel. On a

$$\frac{i_1}{i_0} = 2J_1\left(r - \frac{3}{16}K\alpha^2 r\right)\cos\left[\omega t - \lambda\left(1 - \frac{1}{16}K\alpha^2\right)\right],$$

il y a alors déphasage, fonction de i_0, mais l'amplitude maximum de $\frac{i_1}{i_0}$ peut atteindre $2 \times 0{,}582$ pour $r\left(1 - \frac{3}{16}K\alpha^2\right) = 1{,}84$.

b. Le cas où

$$\frac{K}{\delta}\frac{a_1}{r} > \delta$$

n'a pas été explicité non plus, mais lorsque

$$\frac{K}{\delta^2}\frac{|a_2|}{r} \leq \delta \quad \frac{K}{\delta^2}\frac{a_1}{r},$$

on peut voir qu'il convient d'ajouter les effets mentionnés sous 1° *a* et 2° *a* et que l'on a

$$\frac{i_1}{i_0} \approx 2J_1\left(r - \frac{K a_1}{\delta^2} - \frac{3}{16}K\alpha^2 r\right)\cos\left[\omega t - \lambda\left(1 - \frac{1}{16}K\alpha^2\right)\right].$$

Dans tous les cas où cela est possible, pour obtenir la même amplitude de courant que dans l'hypothèse du rassemblement cinématique *il faut, à profondeur de modulation égale, un espace de rassemblement plus grand.*

Les figures 6 et 7 donnent les variations des coefficients a_1 et a_2 en fonction de $r = \delta\lambda$ pour différentes valeurs de $\frac{p^2}{\alpha^2}$. La figure 8 représente la variation de la demi-amplitude de $\frac{i_1}{i_0}$, dans le cas 1° *a*, pour $\frac{p^2}{\alpha^2}$ égal à 0,5, 1 et 2 (et également pour $\frac{p^2}{\alpha^2} = 0$, quoique ce dernier cas ne soit pas compatible avec le fait qu'on néglige la variation radiale du potentiel). Les courbes de la figure 8 ont été tracées pour des valeurs de K et δ^2 correspondant à l'exemple numérique du paragraphe précédent. On a ajouté également, en pointillé et à titre comparatif, la variation de la demi-amplitude de $\frac{i_1}{i_0}$ dans l'hypothèse du rassemblement cinématique, c'est-à-dire la courbe $J_1(r)$.

Les résultats obtenus dans cet article sont d'autant plus corrects que la vitesse moyenne v_0 des électrons est grande et que la densité de courant i_0 est faible. Il est en effet bien évident que, pour serrer de plus près les effets de la charge d'espace dans le cas général, l'analyse devrait faire intervenir, d'une manière plus intime, les limites des conducteurs de l'électrode étui. Mais les résultats revêtent alors inévitablement une forme si compliquée que finalement ils perdent de ce fait une partie de leur utilité.

Par contre un intérêt important des résultats présentés plus haut vient de la forme analytique simple que l'on a pu leur donner et qui permet de les introduire et de les manier facilement dans les problèmes déjà compliqués en eux-mêmes de réglage et de prédétermination des tubes à modulation de vitesse. Cet intérêt est surtout sensible quand il s'agit d'auto-oscillateurs ou d'amplificateurs à réaction pour lesquels la complication des équations est particulièrement grande à cause des contraintes de phases que l'on doit introduire dans les équations des circuits couplés. Un problème particulièrement suggestif à cet égard est celui de l'étude théorique des courbes de débit des tubes $W_u = f(i_0)$, $W_u = f(U_0)$. On conçoit par exemple facilement la complexité des calculs nécessités pour la prédétermination de la caractéristique de modulation basse fréquence

en amplitude d'un auto-oscillateur dans lequel cette modulation est effectuée par la variation du potentiel d'une grille de contrôle disposée devant la cathode. En effet, dans ce cas, au cours du cycle de modulation, alternativement, le courant i_0 passe d'une valeur faible à une valeur importante, telle que les effets de la charge d'espace dans le tube de glissement d'abord négligeables ne le sont plus ensuite. A ceci s'ajoute que, du fait de la réaction, la profondeur de modulation de vitesse [variable avec i_0 puisque $U_1 = f(i_0)$] passe d'une valeur très petite à une valeur élevée qui peut être telle que, si le couplage entre le collecteur et le modulateur est relativement élevé, les résultats habituels du rassemblement cinématique (établis pour $\delta \ll 1$) ne sont déjà plus valables eux-mêmes.

Appliquée à des cas pratiques rentrant dans le domaine des hypothèses restrictives qui conditionnent sa validité, la théorie précédente (qui montre des effets de charge d'espace plus faibles que ceux que l'on imaginerait en général *a priori*) fournit des résultats en bon accord avec ceux que l'on peut déduire des mesures de puissance utile de tubes « klystron ». Pour ce type de tubes on sait maintenant calculer avec beaucoup d'exactitude les constantes des circuits équivalents aux résonateurs employés : il est possible par suite de déduire de la puissance utile l'expression du groupement effectif des électrons dans le faisceau (puisque l'on connaît l'impédance shunt des circuits, leurs pertes, et d'autre part l'influence de la « largeur » des champs de commande et de prélèvement d'énergie); un tel rapprochement, effectué à plusieurs reprises, a montré que la correction qu'il fallait apporter au résultat de la théorie du rassemblement cinématique était tout à fait de l'ordre de grandeur prévu par la présente analyse.

ANNEXE II.

Considérons (*fig.* 9) un faisceau cylindrique d'électrons de rayon a injecté dans une électrode étui également cylindrique infiniment longue de rayon A, de même axe, et de potentiel U_0. Le potentiel U en un point quelconque est donné par les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta U = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = 4\pi\rho,\\ &\rho v = \text{const.} = \rho_0 v_0 = I_0,\\ &\frac{1}{2} m v^2 = eU. \end{aligned}\right.$$

Le potentiel est donc l'intégrale de l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = \begin{cases} \dfrac{4\pi I_0}{\sqrt{\dfrac{2e}{m}}}\, U^{-\frac{1}{2}} & \text{pour } r < a \quad \text{(région I)},\\ 0 & \text{pour } a < r < A \quad \text{(région II)}, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$U = U_0 \qquad \text{pour } r = A,$$

$$U^{\mathrm{I}} = U^{\mathrm{II}}, \qquad \frac{\mathrm{d}U^{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}U^{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}r} \qquad \text{pour } r = a.$$

Soit U_m le potentiel sur l'axe, posons

$$\theta = \frac{U}{U_m}, \qquad R = \left(\frac{4\pi}{\sqrt{\dfrac{2e}{m}}} I_0 U_m^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} r.$$

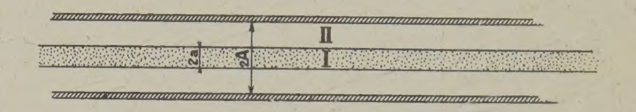


Fig. 9.

Les équations deviennent

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}R^2} + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}R} = \theta^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(région I)}, \qquad (A)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}R^2} + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}R} = 0 \qquad \text{(région II)} \qquad (B)$$

avec les conditions aux limites

$$\theta^{\mathrm{I}}(0) = 1, \qquad \left.\begin{aligned} \theta^{\mathrm{I}} &= \theta^{\mathrm{II}}\\ \frac{\mathrm{d}\theta^{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}R} &= \frac{\mathrm{d}\theta^{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}R} \end{aligned}\right\} \text{pour } R = R_1.$$

La solution de (A) peut se développer en série

$$\theta^{\mathrm{I}} = 1 + \alpha_1 R^2 + \alpha_2 R^4 + \ldots,$$

et on obtient ainsi

$$\theta^{\mathrm{I}} = 1 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{R}{2}\right)^4 + \frac{7}{144}\left(\frac{R}{2}\right)^6 - \frac{31}{1152}\left(\frac{R}{2}\right)^8 + \ldots.$$

Pour de petites valeurs de R (par exemple $R < 1$ condition souvent réalisée en pratique) on peut se limiter au premier terme et écrire

$$\theta^{\mathrm{I}} = 1 + \frac{R^2}{4}. \qquad (C)$$

L'équation (B) s'intègre sans difficulté et donne, compte tenu des conditions aux limites,

$$\frac{2}{R_1^2}(\theta^{\mathrm{II}} - 1) = \mathrm{Log}\,\frac{R}{R_1} + \frac{1}{2},$$

$\theta_2 = \dfrac{U_0}{U_m}$ est relié à

$$R_2 = \left(\frac{4\pi}{\sqrt{\dfrac{2e}{m}}} I_0 U_m^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} A$$

par la condition

$$\theta_2 - 1 = \frac{R_1^2}{2}\left(\mathrm{Log}\,\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2}\right),$$

il existe donc entre θ_2 et R_2 les relations

$$\theta_2 - 1 = \nu R_2^2 \qquad \text{avec} \qquad \nu = \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{A^2}\left(\text{Log}\,\frac{A}{a} + \frac{1}{2}\right),$$

$$R_2^2 = \beta\theta_2^{\frac{3}{2}} \qquad \text{avec} \qquad \beta = \frac{4\pi}{\sqrt{\frac{2e}{m}}}\, I_0 U_0^{-\frac{3}{2}} A^2$$

et θ_2 est donné par

$$(\theta_2 - 1)^2 = \nu^2\beta^2\theta_2^3.$$

Cette équation possède une racine < 1 et deux autres racines correspondant l'une à un régime stable, l'autre à un régime instable. Ces deux racines disparaissent quand

$$A^2\left(\text{Log}\,\frac{A}{a} + \frac{1}{2}\right)\frac{4\pi}{\sqrt{\frac{2e}{m}}}\, I_0 U_0^{-\frac{3}{2}} > \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

et ceci nous donne la valeur maximum de I_0 que l'on peut admettre. Pour le courant total maximum i_0 on obtient la condition

$$\left(\text{Log}\,\frac{A}{a} + \frac{1}{2}\right) i_0 U_0^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{e}{6m}}$$

qui ne contient que U_0 et le rapport $\frac{A}{a}$.

Pour la valeur maximum de I_0, on a

$$\theta_2 = 3, \qquad R_1^2 = \frac{2}{\text{Log}\,\frac{A}{a} + \frac{1}{2}}.$$

Pour $\frac{A}{a}$ voisin de 1, R_1^2 est voisin de 4. L'approximation faite en utilisant la solution (C) est alors assez grossière.

Numériquement on a, en unités pratiques,

$$R^2 = 1,903.10^6\, I_0 U_0^{-\frac{3}{2}} r^2,$$

$$I_{\text{lim}} = \frac{2.10^{-6}\, U_0^{\frac{3}{2}}}{a^2\left(\text{Log}\,\frac{A}{a} + \frac{1}{2}\right)}, \qquad i_{\text{lim}} = \frac{6,3.10^{-6}\, U_0^{\frac{3}{2}}}{\text{Log}\,\frac{A}{a} - \frac{1}{2}}.$$

ANNEXE III.

La fonction $\Omega(z, \zeta, r)$ représente la composante, suivant l'axe, du champ créé en P (*fig.* 4) par le disque N, de rayon a, de densité superficielle unité. En prenant a comme unité de longueur et en posant $\frac{|z-\zeta|}{a} = x$, $\frac{r}{a} = \rho$, Ω n'est fonction que de x et de ρ. Si $V(x, \rho)$ est le potentiel créé en P par le disque N, on a $\Omega(x, \rho) = -\frac{\partial V}{\partial x}$.

Soit N′ la section droite du faisceau qui passe par P; la valeur moyenne de Ω dans N′ sera

$$\overline{\Omega}(x) = 2\int_0^1 \Omega(x, \rho)\rho\, d\rho,$$

et si $\overline{V}(x)$ est également la valeur moyenne de $V(x, \rho)$, on a évidemment $\overline{\Omega}(x) = -\frac{d\overline{V}}{dx}$. Or,

$$V(x, \rho) = \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{\rho'\, d\rho'\, d\varphi}{\sqrt{x^2 + u^2}}$$

avec

$$u^2 = \overline{M'P}^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\varphi,$$

(ρ, ρ' sont respectivement les rayons vecteurs dans le disque N′ de P et de la projection M′ de M; φ est l'angle de ces rayons vecteurs).

En utilisant les identités

$$\int_0^\infty e^{-xt} J_0(ut)\, dt = \frac{1}{\sqrt{x^2 + u^2}}$$

et

$$J_0\left(t\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\varphi}\right) = J_0(\rho t)J_0(\rho' t) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(\rho t)J_n(\rho' t)\cos n\varphi.$$

On obtient

$$V(x, \rho) = 2\pi\int_0^\infty e^{-xt}\,\frac{J_0(\rho t)J_1(t)}{t}\, dt,$$

$$\overline{V}(x) = 4\pi\int_0^\infty e^{-xt}\,\frac{J_1^2(t)}{t^2}\, dt,$$

$$\overline{\Omega}(x) = 4\pi\int_0^\infty e^{-xt}\,\frac{J_1^2(t)}{t}\, dt.$$

Pour passer des calculs effectués avec l'expression simplifiée $\overline{\Omega}(x) = e^{-px}$ aux calculs corrects, il convient, formellement, de remplacer p par t, de multiplier par $4\pi\frac{J_1^2(t)}{t}$ et d'intégrer entre 0 et l'infini. Par exemple, le coefficient a_m du développement en série de τ (§ 2D) s'écrira

$$a_m = 4\pi\int_0^\infty dt\int_0^{\delta\lambda} dy\int_0^{y}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2 + \frac{t^2}{\alpha^2}} J_n(nx) \times [J_{n+m}(nx) - J_{n-m}(nx)]\,\frac{J_1^2(t)}{t}\, dx.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. WARNECKE, *R.G.E.*, juin 1941, **49**, p. 381-409.
[2] R. WARNECKE, *Bulletin S.F.E.*, juin 1942, **2**, n° 16.
[3] A. ARJENJEWA HEIL et O. HEIL, *Zeits. f. Phys.*, juillet 1935, **95**, p. 752-762.
[4] D. L. WEBSTER, *Journ. of Appl. Physics*, juillet 1939, **10**, p. 501-508.
[5] R. WARNECKE et J. BERNIER, *R. G.E.*, janvier 1942, **51**, p. 43.
[6] R. WARNECKE et J. BERNIER, *R.G.E.*, février 1942, **51**, p. 117.
[7] W. C. HAHN et G. F. METCALF, *P.I.R.E.*, **27**, p. 108-116.
[8] R. WARNECKE, *Revue scientifique*, février 1940, p. 104.
[9] F. BORGNIS et E. LEDINEGG, *Zeits. f. Tech. Physik*, 1942, n° **12**, p. 306-312.
[10] W. C. HAHN, *G.E. Review*, 1939, **42**, p. 258.
[11] W. C. HAHN, *G.E. Review*, 1939, **42**, p. 497.
[12] S. RAMO, *Phys. Rev.*, 1939, **56**, p. 276-283.
[13] S. RAMO, *Proc. I.R.E.*, 1939, **27**, p. 757.

SUR L'ENREGISTREMENT DES IMPULSIONS DES COMPTEURS DE GEIGER

Par M. A. DAUVILLIER.

Dans un précédent mémoire : *Recherches sur les photo-compteurs et leurs applications* (1), nous avons décrit l'application du cinémographe Richard à l'enregistrement de la fréquence des impulsions données par un photo-compteur. La présente Note a pour objet de signaler des perfectionnements apportés à ce mode d'enregistrement.

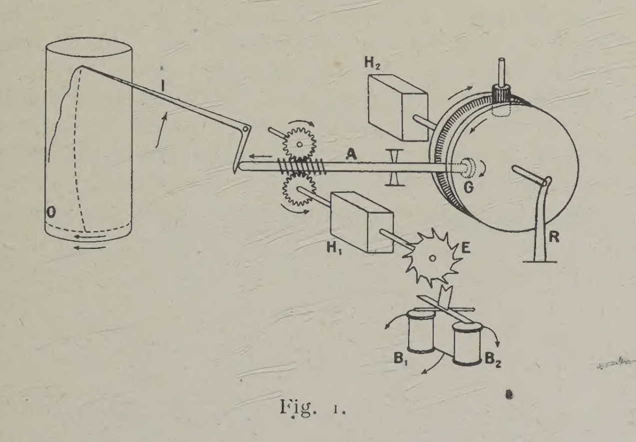


Fig. 1.

Rappelons le principe du cinémographe (*fig.* 1) : les impulsions, qui se succèdent au hasard, agissent électromagnétiquement sur l'échappement E d'un mouvement d'horlogerie H_1, provoquant la translation d'un arbre A commandant une aiguille indicatrice I. Ce mouvement est équilibré par une translation inverse provoquée par la rotation, par friction, d'un galet G porté par l'arbre et tournant entre deux disques, pressés sur le galet par un ressort R et mus, en sens inverse, par un second mouvement d'horlogerie H_2. Ce différentiel a pour objet de toujours ramener le galet vers le centre des disques (origine des coordonnées) avec une vitesse proportionnelle au rayon, c'est-à-dire au déplacement de l'aiguille. Le graphique indique donc, par lecture directe, la fréquence des impulsions.

Les paires de bobines à noyau de fer B_1 et B_2 du relais ont une faible résistance (600 ohms) et exigent un courant d'une vingtaine de milliampères. Aussi n'est-il guère possible de les insérer dans le circuit de plaque d'une triode, d'autant plus que les impulsions données par les compteurs sont de très courte durée, comparativement à l'inertie mécanique du relais. On est donc obligé, soit de les insérer dans le circuit d'un thyratron avec un dispositif à contacts assurant l'extinction et faisant fonctionner alternativement les bobines, soit, de disposer, dans le circuit du thyratron, un numérateur muni d'un contact de travail éteignant le thyratron et mobilisant un inverseur commandant alternativement les bobines par l'intermédiaire d'une batterie.

Tout ce mécanisme est, comme on le voit, assez compliqué. Il introduit des contacts pouvant perturber électromagnétiquement des amplificateurs sensibles utilisés dans le voisinage. Aussi, M. R. Bureau, qui utilise depuis de longues années le cinémographe Richard pour l'enregistrement des parasites atmosphériques, a-t-il établi un relais spécial à grande impédance fonctionnant sur triode.

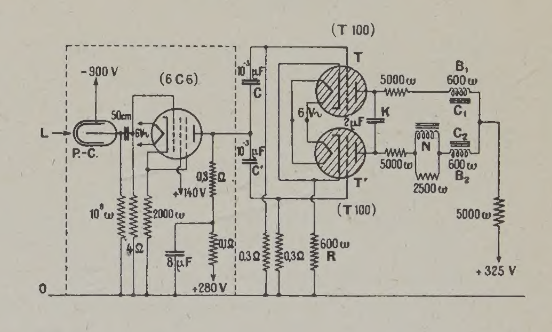


Fig. 2.

Il nous a paru que le relais du cinémographe pouvait être directement actionné d'une manière très simple, par un procédé purement statique, évitant tout contact, en insérant chaque paire de bobines dans les circuits de plaque d'un dédoubleur de fréquence à thyratrons dit « scale of two » (2). Dans ce montage, schématisé par la figure 2, les impulsions provenant de la pentode sont transmises par les condensateurs de liaison C et C′, aux grilles des thyratrons T et T′ polarisées par la résistance

(1) *Journal de Physique* (févr. 1942), 8e série, 3, p. 29-40.

(2) WYNN-WILLIAMS. *Roy. Soc. Proc.*, 1932, t. 136, p. 312.

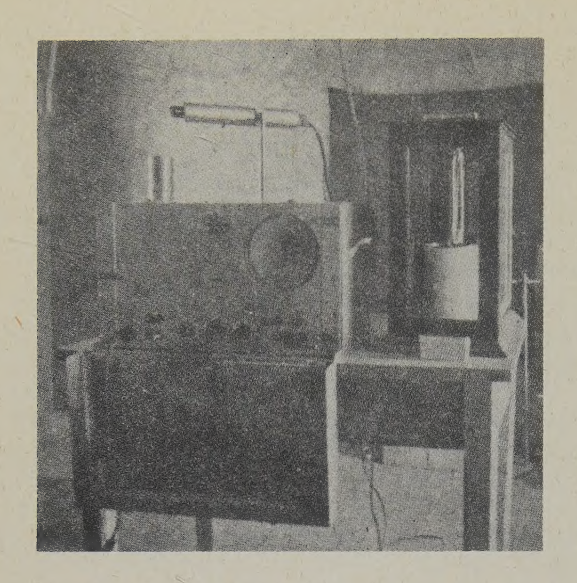


Fig. 3.

cathodique commune R. L'un des thyratrons étant préalablement allumé et l'autre éteint, cette impulsion allume le thyratron éteint et demeure sans effet sur l'autre. Cet allumage provoque l'extinction dù thyratron allumé par le jeu du condensateur K placé en dérivation sur les plaques. Les impulsions actionnent donc alternativement les paires d'électrons du relais B_1 et B_2 en provoquant le jeu normal de l'échappement du cinémographe. Un numérateur N, inséré dans l'un des circuits, indiquera une fréquence égale à la moitié de la fréquence réelle.

Nous avons réalisé ce montage avec des lampes 885 ou T 100 avec la plus grande satisfaction. Le numérateur et le relais fonctionnent dans des conditions idéales, puisqu'ils ne sont pas soumis à de brèves impulsions. Il est ainsi possible de mesurer avec sûreté au numérateur des fréquences dépassant 1000 coups/min. Le cinémographe fonctionne aussi avec une grande fidélité jusqu'à sa fréquence limite d'enregistrement, soit 150 coups/min.

Nous utilisons ce montage, soit pour l'enregistrement des rayons cosmiques, au moyen de compteurs disposés en coïncidence, soit pour l'enregistrement des rayons ultraviolets au moyen des photo-compteurs. La photographie de la figure 3 représente ce dernier appareil, qui fonctionne entièrement sur le secteur. On y voit, à droite, le cinémographe, à gauche le coffret de contrôle muni d'un haut-parleur et d'un voltmètre électrostatique, au-dessus un photo-compteur disposé dans son carter.